



**You have downloaded a document from
RE-BUS
repository of the University of Silesia in Katowice**

Title: Semantyki pewnych logik wielomodalnych

Author: Sławomir Kost

Citation style: Kost Sławomir. (2014). Semantyki pewnych logik wielomodalnych. Praca doktorska. Katowice : Uniwersytet Śląski

© Korzystanie z tego materiału jest możliwe zgodnie z właściwymi przepisami o dozwolonym użytku lub o innych wyjątkach przewidzianych w przepisach prawa, a korzystanie w szerszym zakresie wymaga uzyskania zgody uprawnionego.



UNIwersYTET ŚLĄSKI
W KATOWICACH



Biblioteka
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Uniwersytet Śląski w Katowicach
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Instytut Matematyki



Sławomir Kost
SEMANTYKI PEWNYCH LOGIK
WIELOMODALNYCH

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
dra hab. prof. UŚ Wojciecha Dzika

Katowice 2014

Pragnę podziękować mojemu promotorowi Panu dr. hab. prof. UŚ Wojciechowi Dzikowi za poświęcony czas, przekazaną wiedzę i wsparcie.

Dziękuję również rodzicom za cierpliwość i wyrozumiałość.

Spis treści

Wstęp	ii
1 Preliminaria	1
1.1 Podstawowe pojęcia syntaktyczne i semantyczne	1
1.2 Operacje na strukturach	4
1.3 Własności struktur charakteryzujących systemy jednomodalne	6
2 Fuzja i twierdzenia transformacyjne	10
3 Konstrukcja z punktem \mathcal{C}-startowym	13
3.1 Metoda tworzenia struktur Kripkego dla fuzji dwóch systemów jednomodalnych	13
3.2 Zastosowania konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym	32
4 Konstrukcja z \mathcal{C}-korzeniem	54
4.1 Metoda tworzenia struktur Kripkego dla fuzji dwóch systemów jednomodalnych	54
4.2 Zastosowania konstrukcji z \mathcal{C} -korzeniem	60
5 Porównanie metody z punktem \mathcal{C}-startowym i metody \mathcal{C}- korzenia	70
6 Inne struktury charakteryzujące fuzje systemów jednomodal- nych	73
7 Konstrukcja struktury dla fuzji trzech systemów	82

Wstęp

Zapytaj trzech logików, czym jest logika modalna, a prawdopodobnie otrzymasz co najmniej trzy różne odpowiedzi. Od tych słów swoją książkę rozpoczynają P.Blackburn, M.De Rijke oraz Y.Venema ([3]). Trudno nie zgodzić się z tym stwierdzeniem, gdyż logikę modalną można rozpatrywać na wiele różnych sposobów, a operatory modalne mają niejedną interpretację. Pierwsze operatory modalne zostały wprowadzone w celu rozstrzygnięcia paradoksów implikacji materialnej oraz uzyskania logiki konieczności i możliwości. Pionierem w tej dziedzinie był C. I. Lewis, który w monografii „A survey of symbolic logic” (1918) opisał system z ścisłą implikacją. W następstwie wprowadzenia nowego operatora rozszerzony został zbiór wartości. Poniższa tabela zestawia modalności opisane przez Lewisa.

- (1) p ‘ p jest prawdziwe’,
- (2) $\neg p$ ‘ p jest fałszywe’,
- (3) $\sim p$ ‘ p jest niemożliwe’,
- (4) $-\sim p$ ‘nieprawda, że p jest niemożliwe’ lub ‘możliwe jest p ’,
- (5) $\sim -p$ ‘niemożliwe, że p jest fałszywe’ lub ‘konieczne jest p ’.

Logika opisana przez Lewisa, poza określeniami prawdy i fałszu, rozważa stwierdzenie możliwości i konieczności. Ujmując jego idee we współczesnej notacji, symbolem $\Box\varphi$ zapiszemy ‘konieczne jest φ ’, a symbolem $\Diamond\varphi$ zapiszemy ‘możliwe jest φ ’. Rozważmy przykłady aksjomatów wraz z ich interpretacjami:

- D $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ jeśli konieczne jest φ , to możliwe jest φ ,
- T $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ jeśli φ , to możliwe jest φ ,
- B $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ jeśli φ , to koniecznie możliwe jest φ ,
- 5 $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ jeśli możliwe jest φ , to koniecznie możliwe jest φ .

Wydać się być oczywistym, że przy tak dobranej interpretacji powinniśmy zakładać prawdziwość aksjomatów D oraz T . Prawdziwość pozostałych dwóch nie jest już tak jasna.

Prawdopodobnie najbardziej naturalnym jest postrzeganie operatorów modalnych w kontekście czasu. Czas może być przedstawiany za pomocą wielu modeli. Jednym z nich jest reprezentacja wykorzystująca strukturę relacyjną $\langle T, R \rangle$, gdzie T jest zbiorem momentów w czasie, a R jest relacją binarną określoną na zbiorze T . Operatory modalne \Box oraz \Diamond odczytujemy jako ‘zawsze w przyszłości’ oraz ‘kiedyś w przyszłości’, odpowiednio. Właściwości relacji R są zależne od przyjętej koncepcji postrzegania czasu. Czas możemy postrzegać jako upływający w sposób liniowy. Wówczas relacja R będzie zwrotna, przechodnia i antysymetryczna. Możemy rozpatrywać również porządek ostry. Dla nieskończonego zbioru T rozważa się przynajmniej dwie koncepcje. Pierwsza mówi o dyskretnym charakterze upływającego czasu (pomiędzy dowolnymi dwoma punktami czasu jest skończenie wiele punktów). Druga, wręcz przeciwnie, zakłada, że czas jest gęsty (pomiędzy dowolnymi punktami czasu istnieje trzeci). Strukturami, które wydają się w znacznej mierze przybliżać upływ czasu, są struktury postaci $\langle \mathbb{T}, R \rangle$, gdzie $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ oraz $R \in \{\leq, <\}$. Symbole $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oraz \mathbb{R} oznaczają kolejno zbiór liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych, a \leq oraz $<$ są relacjami liniowego i ostrego porządku, odpowiednio. Systemy charakteryzowane przez te struktury zostały szczegółowo opisane między innymi w [13], [14] oraz [15]. Na podstawie tych publikacji można wykazać równość pomiędzy niektórymi z nich i podać ich aksjomatykę.

$$\text{Log}\{\langle \mathbb{N}, < \rangle\} = \text{Log}\{\langle \mathbb{Z}, < \rangle\} = K4.3 \oplus \Diamond \top \oplus \Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi),$$

$$\text{Log}\{\langle \mathbb{Q}, < \rangle\} = \text{Log}\{\langle \mathbb{R}, < \rangle\} = K4.3 \oplus \Diamond \top \oplus \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi,$$

$$\text{Log}\{\langle \mathbb{N}, \leq \rangle\} = \text{Log}\{\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle\} = S4.3 \oplus \Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi),$$

$$\text{Log}\{\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle\} = \text{Log}\{\langle \mathbb{R}, \leq \rangle\} = S4.3.$$

Inną popularną interpretację przedstawiają logiki epistemiczne, zwane też logikami wiedzy lub logikami przekonania. Za ich pomocą już od lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku próbowano sformalizować zagadnienia dotyczące wiedzy, przekonania czy też wiary. Systemy epistemiczne mają swoje zastosowanie między innymi w teorii gier, sztucznej inteligencji i informatyce. Wydaje się być naturalnym, że w rozpatrywanym systemie możemy mieć więcej niż jeden operator. Dla przykładu rozważmy grupę n agentów $1, \dots, n$. Formalny zapis stanu ich wiedzy wymaga wprowadzenia operatora modalnego

dla każdego z nich. Wówczas operator \Box_i odczytujemy ‘agent i wie’, a operator \Diamond_i odczytujemy ‘agent i wierzy’. Rozważmy interpretację aksjomatów n -modalnego systemu $S5_n = \underbrace{S5 \otimes \dots \otimes S5}_n$ w kontekście wiedzy agentów.

Wówczas poszczególne aksjomaty odczytujemy następująco:

K^i	$\Box_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\psi)$	agent i zna wszystkie logiczne konsekwencje swojej wiedzy
T^i	$\Box_i\varphi \rightarrow \varphi$	wszystko, co wie agent i jest prawdą
4^i	$\Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\Box_i\varphi$	jeśli agent i coś wie, to wie, że o tym wie (agent i jest świadomy swojej wiedzy)
5^i	$\neg\Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\neg\Box_i\varphi$	jeśli agent i czegoś nie wie, to wie, że o tym nie wie (agent i ma świadomość swojej niewiedzy)

System $S5_n$ jest normalnym systemem modalnym. Oznacza to, że zawiera aksjomat K_i oraz jest domknięty na regułę konieczności (generalizacji) $\frac{\varphi}{\Box_i\varphi}$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Domknięcie na regułę konieczności oznacza, że agent i zna wszystkie panujące prawa. Innymi słowy, jeśli φ jest tezą rozpatrywanego systemu, to wówczas ‘agent i wie że φ ’. W powyższym przykładzie nie uwzględniamy interakcji pomiędzy agentami. Wiedza każdego z nich jest niezależna od wiedzy pozostałych. Możemy wyobrazić sobie sytuację, w której należałoby sformalizować pewne zależności. Poniżej przedstawiamy dwa aksjomaty opisujące związek pomiędzy stanem wiedzy agenta i oraz agenta j .

$\Box_i\varphi \rightarrow \Box_j\varphi$	wiedza agenta i jest również wiedzą agenta j ,
$\Box_i\varphi \rightarrow \Box_j\Box_i\varphi$	agent j zna stan wiedzy agenta i .

Powyższy przykład jest motywacją do rozważania systemów wielomodalnych. Opis stanu wiedzy przynajmniej dwóch agentów nie może zostać sformalizowany przez użyciu jednego operatora modalnego.

W literaturze można znaleźć szczegółowy opis dotyczący wielu systemów jednomodalnych. Przykładami takich systemów są chociażby pretabularne elementy kraty normalnych rozszerzeń systemu $S4$. Krata $NExt(S4)$ posiada dokładnie pięć takich elementów. Są nimi $Grz.3$, $S5$, $S4.3B_2M$, $S4GrzB_2$ oraz $S4GrzB_3 \oplus \Diamond\Box\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Systemy te zostały szczegółowo opisane w [5] oraz [6]. Każdy z nich posiada własność modelu skończonego oraz jest charakteryzowany przez pojedynczą strukturę przeliczalną. Twierdzenia transformacyjne zawarte w pracach Krachta i Woltera (1991) oraz Fine’a i Schurza

(1996) pozwalają stwierdzić, że fuzje dowolnej kombinacji dwóch z powyżej wymienionych systemów posiadają własność modelu skończonego. Ponadto, znane są własności relacji takowych modeli. Problemem jest znalezienie spójnej, przeliczalnej struktury Kripkego, która charakteryzuje fuzję dwóch systemów. Na myśl nasuwa się struktura kanoniczna. Niestety rozwiązanie takie nie jest satysfakcjonujące. Struktura kanoniczna jest nieprzeliczalna, niełatwa w zastosowaniu i w opisie. Ponadto, system dwumodalny $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie posiada adekwatnej struktury kanonicznej. Problem znajdowania przeliczalnej struktury Kripkego charakteryzującej fuzję pewnych systemów stanowił motywację niniejszej rozprawy. Jej celem jest zaprezentowanie dwóch metod konstruowania przeliczalnych struktur charakteryzujących fuzję pewnych systemów. Ponadto, otrzymane struktury mają tę własność, iż w wielu przypadkach w prosty sposób można znaleźć, dla rozpatrywanej formuły 2-modalnej φ nie będącej tezą danego systemu, skończoną podstrukturę falsyfikującą formułę φ . Praca zawiera przykłady ilustrujące znajdowanie takich podstruktur dla konkretnych formuł 2-modalnych.

Rozdział 1 zawiera podstawowe pojęcia i definicje z zakresu logiki modalnej. Przedstawiona zostanie semantyka Kripkego dla systemów modalnych, następnie zgłębimy pojęcie prawdziwości formuły. W drugiej części tego rozdziału zaprezentujemy własności relacji determinowane przez poszczególne aksjomaty. Przedstawione systemy jednomodalne wraz z adekwatnymi rodzinami struktur posłużą jako składowe fuzji w następnych rozdziałach.

Treści zawarte w kolejnym rozdziale mają za zadanie przybliżyć pojęcie fuzji systemów modalnych zarówno z syntaktycznego, jak i z semantycznego punktu widzenia. Twierdzenia transformacyjne zaczerpnięte z prac Krachta i Woltera ([12], 1991) oraz Fine'a i Schurza ([8], 1996) służą przeniesieniu własności posiadanych przez poszczególne systemy na ich fuzję.

W kolejnej części rozprawy opiszemy modyfikacje rodzin struktur Kripkego, które zachowują charakteryzowany system. Własności tych modyfikacji wykorzystamy do opisanego przeliczalnej struktury spójnej charakteryzującej system $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ i na jego przykładzie ustalimy, że fuzja systemów tabularnych nie musi być systemem tabularnym. Przedstawimy również przeliczalną spójną strukturę adekwatną dla systemu $S5 \otimes S5$. Następnie uogólnimy metodę wykorzystaną w opisie tych struktur i przedstawimy ogólną procedurę tworzenia przeliczalnych spójnych struktur Kripkego charakteryzujących fuzję systemów jednomodalnych. Metoda ta wykorzystywać będzie własność tak zwanego punktu \mathcal{C} -startowego. Jej działanie zostanie zobrazowane na konkretnych przykładach. Metoda posłuży do skonstruowania przeliczalnych spójnych struktur Kripkego adekwatnych dla systemów $Grz.3 \otimes Grz.3$, $S4GrzB_2 \otimes Tr$ oraz $S5 \otimes Grz.3B_2$. Otrzymanie struktury charakteryzującej system $Grz.3 \otimes Grz.3$ jest swego rodzaju argumentem uza-

sadniającym użyteczność metody.

Rozdział 4 jest poświęcony kolejnej metodzie konstruowania przeliczalnej struktury adekwatnej dla fuzji systemów. Ważną rolę w tej części rozprawy odgrywają struktury ukorzenione. Dlatego początkowy fragment rozdziału poświęcimy dyskusji dotyczącej tego zagadnienia. Konstrukcja uniwersum pożądanego struktury Kripkego oraz opis relacji pokrywa się z opisem zaprezentowanym w metodzie z punktem \mathcal{C} -startowym. Działanie metody opisanej w tej części pracy zobrazujemy na przykładach systemów $Grz.3 \otimes Grz.3$, $S4 \otimes S4$ oraz $S5 \otimes Grz.3B_2$. Powtórne rozpatrywanie struktur charakteryzujących systemy $Grz.3 \otimes Grz.3$ oraz $S5 \otimes Grz.3B_2$ jest jak najbardziej zamierzone. Działanie to ma na celu wskazanie cech wspólnych i różnic pomiędzy obiema metodami konstrukcji.

W Rozdziale 5 zostały zawarte wnioski, które nasuwają się po przeanalizowaniu konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym, konstrukcji z \mathcal{C} -korzeniem oraz przykładów struktur otrzymanych za ich pomocą. W tej części pracy wykazemy, iż przy pewnych założeniach struktura z \mathcal{C} -korzeniem jest generowaną podstrukturą struktury z punktem \mathcal{C} -startowym. Wrócimy do problemu tabularności fuzji systemów tabularnych i wskażemy systemy, których fuzja jest systemem tabularnym.

Metody opisane w rozprawie generują stosunkowo łatwe w opisie i zastosowaniu struktury. Nie można jednak pominąć faktu, iż za ich pomocą nie otrzymamy wszystkich struktur charakteryzujących fuzję systemów jednomodalnych. Przykład takiej struktury znajdzie się w ostatnim rozdziale. Został on zaczerpnięty z mojej pracy [11] i dotyczy systemu $S5 \otimes S5$. Budowa i opis struktury zaprezentowanej w tym rozdziale jest ładząco podobna do struktury charakteryzującej system $S5 \otimes S5$, której opis znajduje się w rozdziale trzecim. W obu przykładach spójne składowe odpowiadające jednej relacji są przeliczalnymi klastrami. Różnica polega na tym, że w przykładzie opisanym w rozdziale szóstym przekrój klastrow odpowiadających różnym relacjom może mieć nieskończenie wiele elementów. Taka sytuacja nie ma miejsca w strukturze otrzymanej z wykorzystaniem konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym lub konstrukcji z \mathcal{C} -korzeniem.

Rozdział 1

Preliminaria

W rozdziale tym zostały wprowadzone podstawowe zagadnienia dotyczące logik modalnych. Ich znajomość jest niezbędna do zrozumienia treści zawartych w pracy. Opisujemy semantykę światów możliwych, wprowadzamy między innymi pojęcie p -morfizmu i sumy rozłącznej struktur Kripkego oraz przedstawiamy niektóre systemy modalne wraz z adekwatnymi dla nich rodzinami struktur. Wiadomości dotyczące pojęć ogólnych zawarte w rozdziale zaczerpnięto z [10], [13] oraz [17]. Opisy rodzin oraz pojedynczych struktur charakteryzujących wyróżnione systemy pretabularne znajduje się w [6].

1.1 Podstawowe pojęcia syntaktyczne i semantyczne

Podstawowym pojęciem syntaktycznym jest pojęcie *języka modalnego*. Definiujemy go zgodnie z tradycyjnym podejściem pochodzącym od Gödela w odróżnieniu od podejścia z tak zwaną ścisłą implikacją. Język modalny oznaczamy \mathcal{ML} .

Alfabet \mathcal{ML} składa się z

- ustalonego, nieskończonego zbioru *zmiennych zdaniowych* p, q, r, \dots ;
- *stałych logicznych*: \top (prawda) oraz \perp (fałsz);
- *spójników logicznych*: \wedge (i), \vee (lub), \rightarrow (implikuje) oraz \neg (nie);
- *operatorów modalnych*: \Box (jest konieczne) oraz \Diamond (jest możliwe);
- *znaków interpunkcyjnych*: $)$ oraz $($.

Pojęcie \mathcal{ML} -formuły (lub krócej *formuły*) definiujemy indukcyjnie w następujący sposób:

- wszystkie zmienne zdaniowe i stałe logiczne są \mathcal{ML} -formułami;
- jeśli φ oraz ψ są \mathcal{ML} -formułami, to również $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$, $(\Box\varphi)$ oraz $(\Diamond\varphi)$ są \mathcal{ML} -formułami;
- nie ma innych \mathcal{ML} -formuł.

Dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$, język n -modalny \mathcal{ML}_n jest zdefiniowany w podobny sposób jak \mathcal{ML} z tym, że zamiast jednej pary operatorów modalnych występuje n par. Tak więc język n -modalny zawiera n operatorów konieczności \Box_1, \dots, \Box_n oraz n operatorów możliwości $\Diamond_1, \dots, \Diamond_n$. Język \mathcal{ML} jest szczególnym przypadkiem języka n -modalnego, gdzie $\mathcal{ML} = \mathcal{ML}_1$. Również pojęcie \mathcal{ML}_n -formuły (lub krócej n -formuły bądź też formuły, gdy \mathcal{ML}_n jest znany lub nie odgrywa ważnej roli) jest zdefiniowane analogicznie do swojego jednomodalnego odpowiednika.

*Normalnym systemem n -modalnym*¹ nazwiemy dowolny zbiór \mathcal{ML}_n -formuł, który zawiera aksjomaty klasycznego rachunku zdań, aksjomat

$$K_i \quad \Box_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\psi),$$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$, jest domknięty na regułę odrywania

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}, \quad (MP)$$

reguły konieczności (generalizacji)

$$\frac{\varphi}{\Box_i\varphi} \quad (RN_i)$$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz podstawianie. W późniejszej części pracy nie będziemy wspominać o podstawianiu definiując systemy. W definicji aksjomatów φ oraz ψ mogą być dowolnymi formułami. Wszystkie systemy rozważane w tej rozprawie są systemami normalnymi. Dlatego zamiast pisać, że L jest systemem normalnym, będziemy pisać krócej, L jest systemem. Pisząc o systemie n -modalnym L mamy na myśli system domknięty na podstawianie oraz prawdziwość aksjomatów klasycznego rachunku zdań i aksjomatu K^i dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Przyjmujemy standardowe pojęcie dowodu w sensie Hilberta. Fakt, że formuła jest tezą systemu L będziemy oznaczać symbolicznie: $L \vdash \varphi$.

Strukturę relacyjną $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ składającą się z niepustego zbioru światów W oraz n relacji binarnych R_1, \dots, R_n określonych na W , będziemy

¹Wielu autorów używa w tym miejscu pojęcia normalnej logiki n -modalnej, porównaj [13], a przez system rozumie się parę złożoną z aksjomatów i reguł.

nazywali *n-strukturą Kripkego*, lub krócej *n-strukturą* bądź *strukturą*. Elementy zbioru W nazywamy *światami*, *stanami* lub *punktami*. Jeśli xR_iy , dla pewnych światów x oraz y , to mówimy, że y jest osiągalny z x za pomocą relacji R_i , lub x widzi y . Świat y nazwiemy następnikiem świata x , a x poprzednikiem y .

Wartościowanie w strukturze $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ definiujemy jako odwzorowanie v , które każdej zmiennej zdaniowej p ustalonego języka przyporządkowuje zbiór $v(p)$ pewnych światów zbioru W (to znaczy $v(p)$ jest zbiorem światów, w których p jest prawdziwe). Parę $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, v \rangle$ nazwiemy wówczas *n-modelem Kripkego* (lub krócej modelem) *bazującym na strukturze* \mathfrak{F} .

Ustalmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ oraz bazujący na niej model $\langle \mathfrak{F}, v \rangle$. Relację *prawdziwości* \mathcal{ML}_n -formuły *w świecie* x modelu $\langle \mathfrak{F}, v \rangle$ definiujemy indukcyjnie względem budowy formuły (standardowo, porównaj [13] oraz [17]):

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash p & \iff x \in v(p); \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \top; \\
(\mathfrak{F}, v, x) \not\Vdash \perp & \quad (\text{nieprawda, że } (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \perp); \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \wedge \varphi & \iff (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \text{ oraz } (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \varphi; \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \vee \varphi & \iff (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \text{ lub } (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \varphi; \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \rightarrow \varphi & \iff (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \text{ implikuje } (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \varphi; \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \neg \varphi & \iff (\mathfrak{F}, v, x) \not\Vdash \varphi; \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \Box_i \varphi & \iff (\mathfrak{F}, v, y) \Vdash \varphi \text{ dla wszystkich } y \in W, xR_iy; \\
(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \Diamond_i \varphi & \iff (\mathfrak{F}, v, y) \Vdash \varphi \text{ dla pewnego } y \in W, xR_iy.
\end{aligned}$$

Powiemy, że \mathcal{ML}_n -formuła φ jest *prawdziwa w modelu* $\langle \mathfrak{F}, v \rangle$ (co zapisujemy $\langle \mathfrak{F}, v \rangle \Vdash \varphi$), jeśli φ jest prawdziwa w każdym świecie tego modelu (to znaczy $\forall x \in W (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \varphi$).

Po zdefiniowaniu prawdziwości w modelu, możemy wprowadzić pojęcie prawdziwości w strukturze. Powiemy, że \mathcal{ML}_n -formuła φ jest *prawdziwa w strukturze* $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$, symbolicznie $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$, jeśli jest ona prawdziwa w każdym modelu opartym na tej strukturze, to znaczy $\forall v \langle \mathfrak{F}, v \rangle \Vdash \varphi$.

Następnie rozważmy rodzinę struktur $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_j : j \in J\}$ dla języka \mathcal{ML}_n . Wówczas formuła φ jest *prawdziwa w rodzinie* \mathcal{C} , co zapiszemy $\mathcal{C} \Vdash \varphi$, jeśli jest ona prawdziwa w każdej strukturze rodziny \mathcal{C} , to znaczy $\forall j \in J \mathfrak{F}_j \Vdash \varphi$. Nietrudno sprawdzić, że zbiór

$$\text{Log}\{\mathcal{C}\} = \{\varphi \in \mathcal{ML}_n : \mathcal{C} \Vdash \varphi\}$$

jest systemem modalnym. Ponadto, powiemy, że rodzina struktur \mathcal{C} *charakteryzuje* system L , lub też, że \mathcal{C} jest *adekwatna* dla systemu L , gdy zachodzi równość $L = \text{Log}\{\mathcal{C}\}$.

Twierdzenie o pełności jest to twierdzenie, które łączy system modalny z rodziną struktur \mathcal{C} w następujący sposób:

$$\mathcal{C} \models \varphi \iff L \vdash \varphi.$$

Innymi słowami

$$\text{Log}\{\mathcal{C}\} = L.$$

Dodatkowo, jeśli istnieje rodzina \mathcal{C} struktur skończonych, która charakteryzuje system L , to wówczas mówimy, że system ten posiada *własność modelu skończonego*, porównaj [17] (f.m.p.-finite model property). W dalszej części rozprawy często będziemy rozpatrywali klasy jednoelementowe \mathcal{C} . Niech $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}\}$. Wówczas powiemy, że struktura \mathfrak{F} charakteryzuje system $\text{Log}\{\mathcal{C}\}$ lub \mathfrak{F} jest pojedynczą strukturą adekwatną dla systemu $\text{Log}\{\mathcal{C}\}$. Przykładami systemów posiadających własność modelu skończonego są systemy jednomodalne $S5$ oraz $Grz.3$. Obydwa te systemy posiadają również pojedynczą strukturę adekwatną.

1.2 Operacje na strukturach

Pojęciem odgrywającym istotną rolę w dalszych rozważaniach jest p -morfizm. Niech $\mathfrak{F}_1 = \langle A, S_1, \dots, S_n \rangle$ oraz $\mathfrak{F}_2 = \langle B, R_1, \dots, R_n \rangle$ będą strukturami. Odwzorowanie surjektywne $f: A \rightarrow B$ (lub $f: \mathfrak{F}_1 \rightarrow \mathfrak{F}_2$) nazwiemy p -morfizmem, gdy spełnia ono następujące warunki:

- 1) jeśli sS_it , to $f(s)R_if(t)$
- 2) jeśli $f(s)R_iu$, to $\exists t (sS_it \wedge f(t) = u)$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Odwzorowanie p -morficzne jest zdefiniowane w taki sposób, aby obrazy światów będących w relacji S_i były ze sobą w relacji R_i . Jeśli element s po przekształceniu jest w relacji z pewnym $u \in B$, to element u jest obrazem pewnego t będącego w relacji z s .

Założmy, że pomiędzy strukturami $\langle A, S_1, \dots, S_n \rangle$ oraz $\langle B, R_1, \dots, R_n \rangle$ istnieje p -morfizm $f: A \rightarrow B$. Wówczas dla każdej \mathcal{ML}_n -formuły φ prawdziwa jest następująca implikacja:

$$\langle A, S_1, \dots, S_n \rangle \models \varphi \implies \langle B, R_1, \dots, R_n \rangle \models \varphi \quad (1.1)$$

Przy pomocy struktur o rozłącznych uniwersach możemy generować nowe struktury. Dla $j \in J$ rozważmy n struktury $\mathfrak{F}_j = \langle W_j, R_1^j, \dots, R_n^j \rangle$ o rozłącznych zbiorach światów, to znaczy $W_k \cap W_j = \emptyset$ dla różnych $k, j \in J$. Sumą

rozłączną struktur \mathfrak{F}_j nazwiemy n -strukturę

$$\sum_{j \in J} \mathfrak{F}_j = \left\langle \bigcup_{j \in J} W_j, \bigcup_{j \in J} R_1^j, \dots, \bigcup_{j \in J} R_n^j \right\rangle.$$

Na potrzeby tej pracy wprowadzimy pojęcie spójności n -struktury. Rozważaną strukturę $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ nazwiemy *spójną*, gdy dla różnych światów $x, y \in W$ istnieje taki ciąg $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in W^{k-1}$, że

$$x S_1 x_1, x_1 S_2 x_2, \dots, x_{k-2} S_{k-1} x_{k-1}, x_{k-1} S_k y,$$

gdzie $S_j \in \{R_1, \dots, R_n, R_1^{-1}, \dots, R_n^{-1}\}$ dla $j \in \{1, \dots, k\}$.

Szczególnym przykładem n -struktury spójnej jest struktura ukorzeniona. Strukturę $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ nazwiemy *ukorzoną*, jeśli istnieje taki świat $x_0 \in W$, że dla każdego $y \in W$ istnieje ciąg $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in W^{k-1}$ światów pośrednich. To znaczy

$$x R_{i_1} x_1, x_1 R_{i_2} x_2, \dots, x_{k-2} R_{i_{k-1}} x_{k-1}, x_{k-1} R_{i_k} y,$$

gdzie $i_j \in \{1, \dots, n\}$ dla $j \in \{1, \dots, k\}$. Wówczas element x_0 jest nazywany *korzeniem* struktury \mathfrak{F} .

W przypadku, gdy dla $j \in J$ struktury \mathfrak{F}_j są strukturami spójnymi, wówczas będziemy je nazywać *spójnymi składowymi* struktury $\sum_{j \in J} \mathfrak{F}_j$. Z definicji wynika, że spójna składowa danej struktury jest maksymalną spójną podstrukturą.

Sumą rozłączną modeli $\mathfrak{M}_j = \langle \mathfrak{F}_j, v_j \rangle$, $j \in J$, nazwiemy model

$$\sum_{j \in J} \mathfrak{M}_j = \left\langle \sum_{j \in J} \mathfrak{F}_j, \bigcup_{j \in J} v_j \right\rangle.$$

Jak łatwo zauważyć, dla dowolnej \mathcal{ML}_n -formuły φ , $j \in J$ oraz $x \in W_j$, zachodzi zależność

$$(\mathfrak{M}_j, x) \models \varphi \iff \left(\sum_{j \in J} \mathfrak{M}_j, x \right) \models \varphi.$$

W następstwie otrzymujemy równoważność

$$\forall_{j \in J} \mathfrak{F}_j \models \varphi \iff \sum_{j \in J} \mathfrak{F}_j \models \varphi. \quad (1.2)$$

Innym interesującym nas zagadnieniem jest pojęcie podstruktury. Rozważmy n -strukturę $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ oraz $\mathfrak{B} = \langle U, S_1, \dots, S_n \rangle$. Powiemy,

że struktura \mathfrak{B} jest *podstrukturą* struktury \mathfrak{F} , jeżeli $U \subseteq W$ oraz S_i jest restrykcją R_i do U , to znaczy $S_i = R_i \cap (U \times U)$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Rozważmy sytuację, gdy R_i jest relacją przechodnią dla pewnego $i \in \{1, \dots, n\}$. R_i -*klastrem* (z angielskiego *cluster*) nazwiemy maksymalną podstrukturę struktury $\langle W, R_i \rangle$, w której relacja R_i jest relacją równoważności. Innymi słowy, R_i -klaster struktury $\langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ jest klasą abstrakcji na W względem poniższej relacji równoważności

$$x \simeq y \iff (xR_iy \wedge yR_ix) \vee x = y$$

(porównaj [16]).

Podstrukturę \mathfrak{B} struktury \mathfrak{F} nazwiemy *generowaną podstrukturą* struktury \mathfrak{F} , jeśli dla każdego $y \in W$, element $y \in U$, gdy xR_iy dla pewnego $x \in U$ oraz pewnego $i \in \{1, \dots, n\}$. Podstruktura struktury \mathfrak{F} generowana przez zbiór $V \subseteq W$ będzie oznaczona $[V]_{\mathfrak{F}}$. Gdy zbiór V składa się z jednego elementu x , to piszemy $[x]_{\mathfrak{F}}$ zamiast $[\{x\}]_{\mathfrak{F}}$. Rodzinę wszystkich podstruktur generowanych przy pomocy elementów rodziny \mathcal{C} będziemy oznaczać przez $GS(\mathcal{C})$ (GS z angielskiego *generated subframe*). Innymi słowy, $GS(\mathcal{C})$ jest najmniejszą rodziną struktur, która zawiera struktury postaci $[V]_{\mathfrak{F}}$ dla dowolnych $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle \in \mathcal{C}$ oraz $V \subseteq W$. To znaczy,

$$GS(\mathcal{C}) = \{[V]_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle \in \mathcal{C}, V \subset W\}.$$

Łatwo zauważyć, że $\mathcal{C} \subseteq GS(\mathcal{C})$. Ponadto, rodzina podstruktur generowana zbiorami jednoelementowymi będzie oznaczana $PGS(\mathcal{C})$ (PGS z angielskiego *point generated subframe*). Tak więc,

$$PGS(\mathcal{C}) = \{[x]_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle \in \mathcal{C}, x \in W\}.$$

Zauważmy, że $PGS(\mathcal{C})$ jest podrodziną rodziny $GS(\mathcal{C})$.

1.3 Własności struktur charakteryzujących systemy jednomodalne

Prawdziwość formuły w modelu, a tym samym prawdziwość formuły w strukturze, na której oparty jest model, zależy od własności relacji tej struktury. W poniższej tabeli podane są niektóre aksjomaty wraz z odpowiadającymi im własnościami relacji ([2], [3], [5]).

K	$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$	brak
T	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	$\forall x \, xRx$ (zwrotność)
4	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$	$\forall x\forall y\forall z \, ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$ (przechodniość)
$B = B_1$	$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	$\forall x\forall y \, (xRy \Rightarrow yRx)$ (symetria)
M	$\Box\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$	$\forall x\exists y \, (xRy \wedge \forall z\forall w \, ((yRz \wedge yRw) \Rightarrow z = w))$
Grz	$\Box(\Box(\varphi \rightarrow \Box\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$	nie istnieje nieskończony ciąg x_1, x_2, \dots , w którym $x_j Rx_{j+1}$ oraz $x_j \neq x_{j+1}$ dla $j \in \mathbb{N}$
$\cdot 3$	$\Box(\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \vee \Box(\Box\psi \rightarrow \Box\varphi)$	$\forall x\forall y\forall z \, ((xRy \wedge xRz) \Rightarrow (yRz \vee zRy))$
B_2	$\Diamond(\Box\psi \wedge \underbrace{\neg(\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi)}_B) \rightarrow \psi$	nie istnieje łańcuch x_1, x_2, x_3 ($x_j Rx_{j+1}$ oraz nie zachodzi $x_{j+1} Rx_j$ dla $j \in \{1, 2\}$)
B_3	$\Diamond(\Box\gamma \wedge \neg B_2) \rightarrow \gamma$	nie istnieje łańcuch x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_j Rx_{j+1}$ oraz nie zachodzi $x_{j+1} Rx_j$ dla $j \in \{1, 2, 3\}$)

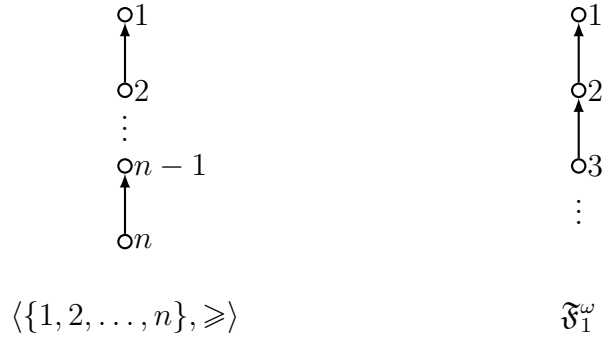
Podane wyżej własności relacji odpowiadających formułom M , Grz , $\cdot 3$, B , B_2 oraz B_3 zachodzą dla rozszerzeń systemu $K4$ (porównaj z [5, str. 33, 51]). W przypadku n -modalnym rozważane struktury posiadają n relacji. Wówczas własności relacji z indeksem i odpowiadają i -tej modalności.

System modalny L nazywa się *tabularnym*, gdy jest charakteryzowany przez strukturę skończoną. Natomiast L jest *pretabularny*, gdy nie jest tabularny, ale każde jego właściwe rozszerzenie jest tabularne. Poniżej opiszemy systemy pretabularne z kraty normalnych rozszerzeń systemu $S4$ istotne w dalszych rozważaniach. Przypomnijmy, że system $S4$ jest najmniejszym systemem modalnym zawierającym aksjomaty K , T , 4 oraz jest domknięty na regułę MP oraz regułę RN . Przykłady poniżej zamieszczone można znaleźć również w [5] oraz [6].

(1) System $S4.3Grz$ jest najmniejszym systemem, który zawiera aksjomaty K , T , 4 , $\cdot 3$ oraz Grz i jest domknięty na regułę MP oraz regułę RN . System ten jest charakteryzowany przez rodzinę struktur

$$\{\langle \{1, 2, \dots, n\}, \geq \rangle : n \in \mathbb{N}\}$$

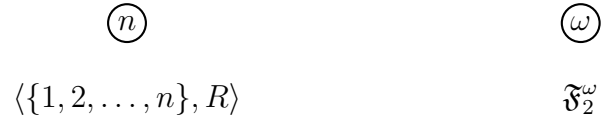
lub przez pojedynczą strukturę $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$. W swojej książce Boolos [4] wykazał, iż systemy Grz oraz $S4Grz$ są równoważne. Stąd też system $S4.3Grz$ jest równoważny systemowi $Grz.3$, którego aksjomatami są K , $\cdot 3$ oraz Grz .



(2) System $S5$ jest aksjomatyzowany przez K , T , 4 oraz B i jest domknięty na reguły MP oraz RN . System $S5$ charakteryzuje rodzina wszystkich klastrów skończonych postaci

$$\{ \langle \{1, 2, \dots, n\}, R \rangle : n \in \mathbb{N}, R \text{ jest relacją pełną} \}$$

lub pojedynczy, nieskończony klaster, strukturę \mathfrak{F}_2^ω .

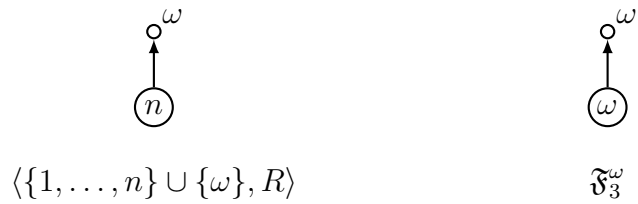


(3) System $S4.3B_2M$ jest aksjomatyzowany przez K , T , $\cdot 3$, B_2 oraz M i, jak poprzednio, domknięty jest na reguły MP oraz RN . System ten jest charakteryzowany przez rodzinę struktur

$$\{ \langle \{1, \dots, n\} \cup \{\omega\}, R \rangle : n \in \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{N} \text{ lub } y = \omega \}.$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, rodzinę tą możemy zastąpić pojedynczą strukturą

$$\mathfrak{F}_3^\omega = \langle \mathbb{N} \cup \{\omega\}, R \rangle, \text{ gdzie } xRy \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{N} \text{ lub } y = \omega.$$

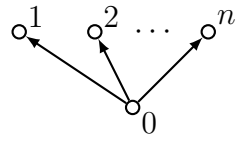


(4) System $S4GrzB_2$ jest aksjomatyzowany przez K , T , 4 , Grz oraz B_2 (lub K , Grz oraz B_2) i jest domknięty na reguły MP oraz RN . $S4GrzB_2$ można scharakteryzować za pomocą następującej rodziny struktur

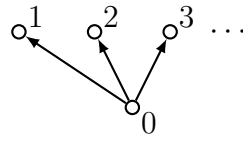
$$\{\langle \{0, 1, \dots, n\}, R \rangle : n \in \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow x = y \text{ lub } x = 0\}$$

lub przez pojedynczą strukturę

$$\mathfrak{F}_4^\omega = \langle \mathbb{N}_0, R \rangle, \text{ gdzie } xRy \Leftrightarrow x = y \text{ lub } x = 0.$$



$$\langle \{0, 1, \dots, n\}, R \rangle$$



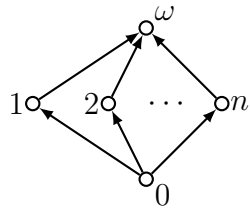
$$\mathfrak{F}_4^\omega$$

(5) System $S4GrzB_3 \oplus \Diamond \Box \Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ jest aksjomatyzowany przez K , T , 4 , Grz , B_3 oraz $\Diamond \Box \Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ (lub K , Grz , B_3 oraz $\Diamond \Box \Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$) i jest domknięty na reguły MP oraz RN . System ten charakteryzuje rodzina struktur

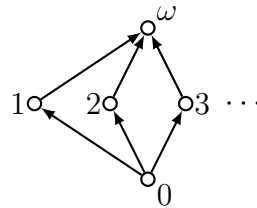
$$\{\langle \{0, 1, \dots, n\} \cup \{\omega\}, R \rangle : n \in \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = y \text{ lub } y = \omega\}$$

lub pojedyncza struktura

$$\mathfrak{F}_5^\omega = \langle \mathbb{N} \cup \{0, \omega\}, R \rangle, \text{ gdzie } xRy \Leftrightarrow x = 0 \text{ lub } x = y \text{ lub } y = \omega.$$



$$\langle \{0, 1, \dots, n\} \cup \{\omega\}, R \rangle$$



$$\mathfrak{F}_5^\omega$$

Rozdział 2

Fuzja i twierdzenia transformacyjne

Interesującym nas zagadnieniem jest pojęcie fuzji systemów modalnych. Z syntaktycznego punktu widzenia jest to najprostszy sposób łączenia systemów wielomodalnych. Rozdział ten zawiera podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące zagadnienia fuzji systemów. Ich celem jest rozstrzygnąć, czy własność posiadana przez systemy L_1 oraz L_2 jest również własnością ich fuzji. Treści zawarte w rozdziale oparto na pracy Krachta i Woltera ([12], 1991) oraz Fine’a i Schurza ([8], 1996). Kompleksowy przegląd tych zagadnień zaprezentowano również w [13].

Niech L_1 oraz L_2 będą systemami wielomodalnymi sformułowanymi w językach \mathcal{L}_1 oraz \mathcal{L}_2 , odpowiednio. Obydwa języki zawierają spójniki $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$, ale zbiory ich operatorów modalnych są rozłączne. Suma języków \mathcal{L}_1 oraz \mathcal{L}_2 jest oznaczana przez $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. *Fuzję systemów L_1 oraz L_2* nazwiemy najmniejszy system wielomodalny w języku $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$, który zawiera $L_1 \cup L_2$, oznaczając $L_1 \otimes L_2$. W szczególności, jeśli zbiorem aksjomatów systemu L_1 jest Ax_1 , a zbiorem aksjomatów systemu L_2 jest Ax_2 , to wówczas $Ax_1 \cup Ax_2$ aksjomatyzuje system $L_1 \otimes L_2$.

W szczególności, możemy rozpatrywać fuzję dwóch systemów jednomodalnych L_1 oraz L_2 opisanych za pomocą języków z modalnościami \Box_1 oraz \Box_2 , odpowiednio. Rozważmy fuzję dwóch systemów jednomodalnych $S5$. Wówczas system $S5 \otimes S5$ jest najmniejszym systemem dwumodalnym zawierającym aksjomaty

$$K^1 \quad \Box_1(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_1\varphi \rightarrow \Box_1\psi)$$

$$T^1 \quad \Box_1\varphi \rightarrow \varphi$$

$$4^1 \quad \Box_1\varphi \rightarrow \Box_1\Box_1\varphi$$

$$B^1 \quad \Diamond_1\Box_1\varphi \rightarrow \varphi$$

systemy $S5$ dla pierwszej modalności, aksjomaty

$$K^2 \quad \Box_2(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_2\varphi \rightarrow \Box_2\psi)$$

$$T^2 \quad \Box_2\varphi \rightarrow \varphi$$

$$4^2 \quad \Box_2\varphi \rightarrow \Box_2\Box_2\varphi$$

$$B^2 \quad \Diamond_2\Box_2\varphi \rightarrow \varphi$$

systemy $S5$ dla drugiej modalności oraz jest domknięty na regułę odrywania

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}, \quad (MP)$$

oraz reguły konieczności (generalizacji)

$$\frac{\varphi}{\Box_i\varphi} \quad (RN_i)$$

dla $i = 1, 2$.

Rozważmy klasę n -struktur \mathcal{C}_1 oraz klasę m -struktur \mathcal{C}_2 , które są domknięte na sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Wówczas *fuzją rodzin* \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 nazywamy rodzinę $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ $n + m$ -struktur postaci

$$\langle W, R_1, \dots, R_n, S_1, \dots, S_m \rangle,$$

gdzie $\langle W, R_1, \dots, R_n \rangle \in \mathcal{C}_1$ oraz $\langle W, S_1, \dots, S_m \rangle \in \mathcal{C}_2$. Przy tak zdefiniowanym pojęciu fuzji, wydaje się oczywiste, że jeśli \mathcal{C}_1 charakteryzuje system L_1 , a \mathcal{C}_2 charakteryzuje system L_2 , to $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ jest rodziną $L_1 \otimes L_2$ -struktur. Co więcej, Kracht i Wolter (1991) oraz Fine i Schurz (1996) wykazali następujący fakt.

Twierdzenie 2.1. *Niech \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 będą rodzinami struktur charakteryzującymi systemy L_1 oraz L_2 , odpowiednio, przy czym obydwie rodziny są domknięte na sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Wówczas fuzja $\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ charakteryzuje system $L_1 \otimes L_2$.*

Ci sami autorzy wykazali również, że w przypadku skończonych struktur wystarczy założyć domknięcie na skończone sumy rozłączne. Oznacza to, że

fuzja zachowuje własność skończonego modelu. Innymi słowy prawdziwy jest poniższy wniosek.

Wniosek 2.2. *Jeśli L_1 oraz L_2 są systemami wielomodalnymi posiadającymi własność skończonego modelu, to również system $L_1 \otimes L_2$ ma tę własność.*

Zarówno Twierdzenie 2.1 jak i Wniosek 2.2 są niezbędnymi narzędziami dowodowymi w kolejnych rozdziałach rozprawy. Kolejną własnością zachowywaną przez fuzję systemów modalnych jest kanoniczność. Fakt ten udowodnili w swoim artykule Kracht i Wolter.

Pojęcie kanoniczności (z angielskiego *canonicity*) zostało szczegółowo opisane w [3] oraz [9]. Rozważmy n -modalnym system L . Powiemy, że zbiór \mathcal{ML}_n -formuł Γ jest L -maksymalny, jeśli zawiera L oraz jest maksymalnym zbiorem niesprzecznym domkniętym na regułę MP . Wówczas, dla każdej \mathcal{ML}_n -formuły φ mamy $\varphi \in \Gamma$ albo $\neg\varphi \in \Gamma$. Kanoniczną strukturą Kripkego dla systemu L jest

$$\mathfrak{F}^L = \langle S^L, R_1^L, \dots, R_n^L \rangle,$$

gdzie

$$S^L = \{\Gamma : \Gamma \text{ jest } L - \text{maksymalny}\},$$

a R_i^L jest relacją binarną określoną na S^L w następujący sposób: $sR_i^L t$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej \mathcal{ML}_n -formuły φ zachodzi implikacja

$$\Box_i \varphi \in s \Rightarrow \varphi \in t.$$

System n -modalny L jest *kanoniczny*, jeśli $L = \text{Log}\{\mathfrak{F}^L\}$. Przykładem jednomodalnego systemu kanonicznego jest system $S5$.

Twierdzenie 2.3. *Założmy, że $\perp \notin L_1, L_2$. Wówczas $L_1 \otimes L_2$ jest systemem kanonicznym wtedy i tylko wtedy, gdy L_1 oraz L_2 są systemami kanonicznymi. Kolejne twierdzenie opisuje zachowanie kanoniczności względem operacji fuzji.*

Powyższe twierdzenie wskazuje na przydatność metod, które zostaną opisane w rozdziałach 3 oraz 4. Dla przykładu rozważmy jednomodalny system $Grz.3$. W [7] K.Fine wykazał, iż system ten nie jest kanoniczny. Na mocy tego faktu i Twierdzenia 2.3 wnioskujemy, iż system $Grz.3 \otimes Grz.3$ nie posiada adekwatnej struktury kanonicznej. Zarówno metoda punktu \mathcal{C} -startowego jak i metoda \mathcal{C} -korzenia, które przedstawimy później, generują struktury charakteryzujące system $Grz.3 \otimes Grz.3$.

Rozdział 3

Konstrukcja z punktem \mathcal{C} -startowym

Niniejszy rozdział zawiera opis konstrukcji przeliczalnej struktury charakteryzującej fuzję pewnych systemów jednomodalnych. Jest ona szczegółowo opisana w dowodzie Twierdzenia 3.5. Rozpocznijmy od wprowadzenia definicji punktu \mathcal{C} -startowego. Następnie skupimy się na operacjach, które modyfikują rodzinę struktur Kripkego przy jednoczesnym zachowaniu charakteryzowanego systemu. Formalny opis konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym poprzedzimy analizą dwóch przykładów, które pomogą zobrazować ideę tworzenia pożądanej struktury.

3.1 Metoda tworzenia struktur Kripkego dla fuzji dwóch systemów jednomodalnych

Rozdział ten opisuje metodę konstruowania przeliczalnych struktur charakteryzujących fuzję systemów jednomodalnych. Metoda ta wykorzystuje własność tak zwanego punktu \mathcal{C} -startowego. Przykłady zawarte w tym rozdziale dotyczą fuzji systemów jednomodalnych. Ich fuzję będą opisane w języku \mathcal{ML}_2 z modalnościami \Box_1 oraz \Box_2 .

Rozważmy rodzinę $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ struktur spójnych oraz spójną strukturę \mathfrak{F} . Powiemy, że punkt x_0 struktury \mathfrak{F} jest *punktem \mathcal{C} -startowym*, jeśli, dla każdego $i \in I$, dowolne odwzorowanie $f : \{x_0\} \rightarrow \mathfrak{F}_i$ można rozszerzyć do p -morfizmu $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_i$. Metoda ta może być wykorzystana dla wielu systemów, a jej podstawową zaletą jest generowanie struktur przeliczalnych z łatwym w użyciu opisem. W procesie konstruowania adekwatnej struktury wykorzystane są operacje, które nie zmieniają generowanego systemu. Jedną z nich jest domknięcie rodziny struktur na sumy rozłączne i izomorficzne

kopie. Rozpocniemy od następującego lematu.

Lemat 3.1. *Rozważmy rodzinę \mathcal{C} struktur spójnych charakteryzującą system L . Niech \mathcal{C}' będzie domknięciem rodziny \mathcal{C} na izomorficzne kopie i sumy rozłączne. Wówczas rodzina \mathcal{C}' charakteryzuje system L . Oznacza to, że spełniona jest równość:*

$$\text{Log}\{\mathcal{C}'\} = \text{Log}\{\mathcal{C}\}.$$

Dowód. Rodzina \mathcal{C}' jest domknięciem rodziny \mathcal{C} , zatem $\text{Log}\{\mathcal{C}'\}$ jest podsystemem systemu $\text{Log}\{\mathcal{C}\}$. Innymi słowy prawdziwa jest implikacja:

$$\mathcal{C}' \Vdash \varphi \implies \mathcal{C} \Vdash \varphi$$

dla każdej formuły φ .

Aby wykazać implikację przeciwną, założymy, że formuła φ nie jest tezą systemu $\text{Log}\{\mathcal{C}'\}$. Zatem istnieje struktura \mathfrak{F} należąca do rodziny \mathcal{C}' , która odrzuca formułę φ w punkcie x_0 przy pewnym wartościowaniu v , to znaczy $(\mathfrak{F}, v, x_0) \not\models \varphi$. Weźmy $\mathfrak{F} = \sum_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, gdzie \mathfrak{F}_i są strukturami spójnymi, $i \in I$, oraz niech x_0 będzie światem należącym do składowej \mathfrak{F}_{i_0} dla pewnego $i_0 \in I$. Na wartość formuły w świecie x_0 mają wpływ elementy dostępne z tego świata. Więc

$$(\mathfrak{F}_{i_0}, v|_{\mathfrak{F}_{i_0}}, x_0) \not\models \varphi.$$

Struktura \mathfrak{F}_{i_0} jest izomorficzną kopią pewnego elementu rodziny \mathcal{C} , który również odrzuca formułę φ . Zatem $\mathcal{C} \not\models \varphi$. \square

Operacja opisana w powyższym lemacie pozwala zmodyfikować badane rodziny struktura \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 tak, aby możliwe było zastosowanie Twierdzenia 2.1. Poniższe dwa lematy umożliwiają ograniczenie się do spójnych składowych struktur z rodziny $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ otrzymanej w wyniku zastosowania Twierdzenia 2.1.

Lemat 3.2. *Rozważmy rodziny \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 struktur spójnych. Niech \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 będą domknięciami tych rodzin, odpowiednio, na izomorficzne kopie oraz sumy rozłączne. Wówczas rodzina $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ jest domknięta na spójne składowe. Innymi słowy, jeśli struktura $\mathfrak{F} = \sum_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ jest elementem rodziny $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$, a \mathfrak{F}_i są spójnymi składowymi struktury \mathfrak{F} , $i \in I$, to wówczas \mathfrak{F}_i jest elementem rodziny $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ dla każdego $i \in I$.*

Dowód. Niech $\mathfrak{F} = \langle W, S_1, S_2 \rangle = \sum_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ będzie elementem rodziny $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$, gdzie \mathfrak{F}_i są spójnymi składowymi struktury \mathfrak{F} , $i \in I$. Zauważmy, że rodziny \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 są domknięte na spójne składowe. Oznacza to, że jeśli struktura jest elementem rodziny \mathcal{C}'_1 (lub \mathcal{C}'_2), to jej spójne składowe też są elementami

tej rodziny. Wybierzmy dowolne $i_0 \in I$. Niech $\mathfrak{F}_{i_0} = \langle W', S'_1, S'_2 \rangle$. Wówczas $\langle W', S'_1 \rangle$ jest rozłączną sumą spójnych składowych elementów rodziny \mathcal{C}'_1 , natomiast $\langle W', S'_2 \rangle$ jest rozłączną sumą spójnych składowych elementów rodziny \mathcal{C}'_2 . Zatem $\langle W', S'_1 \rangle \in \mathcal{C}'_1$ oraz $\langle W', S'_2 \rangle \in \mathcal{C}'_2$. Zgodnie z definicją fuzji rodzin struktur otrzymujemy $\mathfrak{F}_{i_0} = \langle W', S'_1, S'_2 \rangle \in \mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$. \square

Następny lemat wymaga wprowadzenia definicji podrodziny struktur spójnych. Dla ustalonej rodziny struktur \mathcal{C} , symbolem $CS(\mathcal{C})$ będziemy oznaczać podrodzinę rodziny \mathcal{C} składającą się z wszystkich struktur spójnych.

Lemat 3.3. *Niech \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 będą rodzinami struktur spójnych, a \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 będą domknięciami tych rodzin, odpowiednio, na izomorficzne kopie oraz sumy rozłączne. Wówczas $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ jak i $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ generują ten sam system,*

$$\text{Log}\{\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2\} = \text{Log}\{CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)\}.$$

Innymi słowy, zawężenie rodziny $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ do struktur spójnych nie zmienia charakteryzowanego systemu.

Dowód. Rodzina $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ jest podrodziną $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$, więc prawdziwa jest implikacja

$$\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \Vdash \varphi \implies CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2) \Vdash \varphi$$

dla każdej formuły φ . Prawdziwość implikacji przeciwnej wynika z faktu, iż formuła sfalsyfikowana w strukturze jest falsyfikowana w pewnej spójnej składowej tej struktury (równoważność 1.2). \square

Zanim sformułowane zostanie główne twierdzenie tej sekcji, przedstawimy przykłady, których analiza pomoże w zrozumieniu metody dowodzenia.

System $(\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\})$.

System ten opiszemy w języku dwumodalnym \mathcal{ML}_2 z operatorami \Box_1 oraz \Box_2 . Struktura $\textcircled{2}$ posiada dwa światy i jedną relację, która jest relacją pełną (to znaczy $\textcircled{2}$ jest klastrem dwuelementowym). Zgodnie z Lematem 3.1 domknięcie rodziny $\mathcal{C} = \{\textcircled{2}\}$ na skończone sumy rozłączne i izomorficzne kopie nie zmienia charakteryzowanego systemu. Niech więc \mathcal{C}' będzie domknięciem rodziny $\{\textcircled{2}\}$ na skończone sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Z Twierdzenia 2.1 wynika, iż system $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ jest charakteryzowany przez klasę $\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$ wszystkich skończonych struktur postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są klastrami dwuelementowymi. Zgodnie z Lematem 3.3 można ograniczyć się do struktur spójnych, więc bez straty ogólności zakładamy, że struktura

\mathfrak{B} jest spójna. Zatem system $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ jest charakteryzowany przez klasę $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$ wszystkich skończonych struktur spójnych postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są klastrami dwuelementowymi.

Przykładem $\text{Log}\{\textcircled{2}\}$ -struktury z punktem \mathcal{C} -startowym jest $\textcircled{2}$. Wynika to z faktu, iż każde odwzorowanie różnowartościowe pomiędzy klastrami dwuelementowymi jest p -morfizmem. Przy pomocy tej struktury konstruujemy $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ -strukturę Kripkego $\mathfrak{F}_1 = \langle W, R, B \rangle$, którą można p -morficznie odwzorować na dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Dla ułatwienia oznaczymy elementy struktury $\textcircled{2}$ jako 0 oraz 1. Zatem

$$\textcircled{2} = \langle \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)\} \rangle.$$

Niech 0 będzie punktem \mathcal{C} -startowym. Wówczas każda R -spójna oraz B -spójna składowa nowej struktury \mathfrak{F}_1 będzie izomorficzna z $\textcircled{2}$, a każdy punkt tej struktury będzie odpowiadał punktowi \mathcal{C} -startowemu struktury $\textcircled{2}$ dla R lub B -spójnej składowej. Pożądaną strukturą jest $\mathfrak{F}_1 = \langle W, R, B \rangle$, gdzie

$$W = \{(\underbrace{a_1, 1, 1, \dots, 1}_n, 0) : n \in \{2, 3, \dots\}, a_1 \in \{0, 1\}\},$$

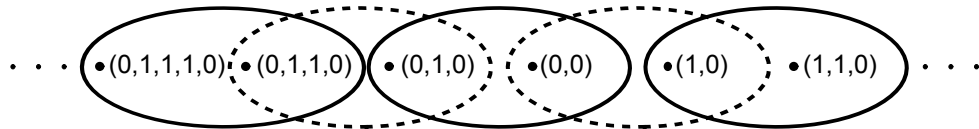
R oraz B są relacjami binarnymi na U działającymi następująco:

$$(\underbrace{a_1, 1, 1, \dots, 1}_n, 0) R (\underbrace{b_1, 1, 1, \dots, 1}_m, 0) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy:}$$

- $n = m = 2$ lub
- $m = n$ oraz $a_1 = b_1$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest nieparzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1$.

$$(\underbrace{a_1, 1, 1, \dots, 1}_n, 0) B (\underbrace{b_1, 1, 1, \dots, 1}_m, 0) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy:}$$

- $m = n$ oraz $a_1 = b_1$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest parzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1$.

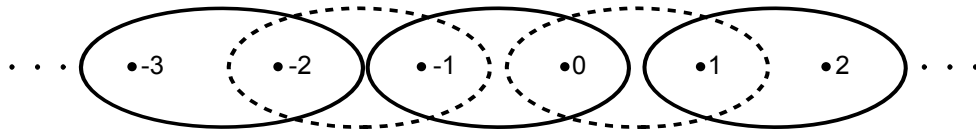


Rysunek 3.1: \mathfrak{F}_1

Światy struktury \mathfrak{F}_1 zostały opisane przy pomocy ciągów, których elementami są światy struktury $\textcircled{2}$. Zapis ten można uprościć i światy struktury \mathfrak{F}_1 opisać za pomocą liczb całkowitych \mathbb{Z} . Wówczas $\mathfrak{F}_1 = \langle \mathbb{Z}, R, B \rangle$, a relacje R oraz B działają w sposób następujący:

- $x = y$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest liczbą parzystą, $|x - y| = 1$.

- $x = y$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest liczbą nieparzystą, $|x - y| = 1$.



Spójne składowe odpowiadające poszczególnym relacjom są klastrami dwuelementowymi, zatem

$$\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\} \vdash \varphi \implies \mathfrak{F}_1 \Vdash \varphi. \quad (3.1)$$

Aby wykazać implikację przeciwną należy udowodnić, iż dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$ jest p -morficznym obrazem struktury \mathfrak{F}_1 . Rozważmy strukturę $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ będącą elementem rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. To znaczy \mathfrak{B} jest skończoną strukturą spójną, w której S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są klastrami dwuelementowymi. Następnie wybierzmy dowolny element z V i nazwijmy go x_0 . Wówczas istnieje dokładnie jeden taki element

$x \in V \setminus \{x_0\}$, że $x_0 S_1 x$. Nazywamy go x_1 . Podobnie, dla relacji S_2 istnieje element o tej samej własności. Nazwijmy go x_{-1} . Ogólnie, jeśli punkt x_n jest już wybrany dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, wówczas możliwe są następujące przypadki:

- $n \in \{1, 3, 5, \dots\}$
Wówczas zachodzi relacja $x_n S_1 x_{n-1}$. Jedyne taki punkt $x \in V \setminus \{x_n\}$, że $x_n S_2 x$ nazwiemy x_{n+1} .
- $n \in \{2, 4, 6, \dots\}$
W tym przypadku zachodzi relacja $x_n S_2 x_{n-1}$. Wówczas x_{n+1} jest nazwą elementu $x \in V \setminus \{x_n\}$, dla którego $x_n S_1 x$.
- $n \in \{-1, -3, -5, \dots\}$
Wówczas mamy $x_n S_2 x_{n+1}$, a x_{n-1} jest nazwą elementu $x \in V \setminus \{x_n\}$ osiągalnego z x_n poprzez relację S_1 .
- $n \in \{-2, -4, -6, \dots\}$
Wtedy $x_n S_1 x_{n+1}$, a element $x \in V \setminus \{x_n\}$, dla którego $x_n S_2 x$ nazywamy x_{n-1} .

Struktura \mathfrak{B} jest skończona i spójna, a procedura nazywania punktów się nie kończy. Tak więc każdy element struktury zostanie nazwany nieskończenie wiele razy.

Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{Z} \rightarrow V$, które każdej liczbie całkowitej n przyporządkowuje element x_n , to znaczy

$$f(n) = x_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Relacji R odpowiada relacja S_1 , a relacji B odpowiada relacja S_2 . Wykażemy, że odwzorowanie f jest p -morfizmem. Należy więc sprawdzić następujące dwa warunki definicji p -morfizmu:

Warunek 1.

- (a) $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas $n R n$ oraz $f(n) = x_n$. Oczywiście $x_n S_1 x_n$.
- (b) Niech n będzie liczbą parzystą. Wówczas $n R (n+1)$. Ponadto $f(n) = x_n$, $f(n+1) = x_{n+1}$ oraz $x_n S_1 x_{n+1}$.

- (c) Niech n będzie liczbą nieparzystą. Wtedy $nR(n-1)$. Dodatkowo $f(n) = x_n$, $f(n-1) = x_{n-1}$ oraz $x_n S_1 x_{n-1}$.

Warunek 2. Załóżmy, że $f(n)S_1x_k$.

- (a) Gdy $f(n) = x_k$, to nRn .
- (b) Przypuśćmy, że $f(n) = x_n \neq x_k$ oraz n jest parzyste. Punkt x_k jest nazwany również x_{n+1} oraz $x_{n+1} = f(n+1)$. Dla n parzystego mamy więc $nR(n+1)$.
- (c) Na koniec przypuśćmy, że $f(n) = x_n \neq x_k$ oraz n jest nieparzyste. Wtedy x_k jest także nazwany również x_{n-1} oraz $x_{n-1} = f(n-1)$. Dla n nieparzystego otrzymujemy $nR(n-1)$.

Pokazaliśmy więc, że odwzorowanie f jest p -morfizmem. Zatem strukturę \mathfrak{F}_1 można p -morficznie odwzorować na dowolną skończoną strukturę spójną $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w której S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są klastrami dwuelementowymi. Z własności 1.1 wynika, że formuła prawdziwa w strukturze \mathfrak{F}_1 jest również prawdziwa we wszystkich spójnych strukturach skończonych, w których spójne składowe odpowiadające poszczególnym relacjom są klastrami dwuelementowymi. Z powyższego faktu i implikacji 3.1 wynika, iż struktura \mathfrak{F}_1 charakteryzuje system $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$.

□

Przykład 3.4. Aby udowodnić, że formuła $\Diamond_1(\Box_2p \wedge \neg(\Diamond_1\Box_2q \rightarrow q)) \rightarrow p$ nie jest tezą systemu $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$, należy dobrać odpowiednie wartościowanie falsyfikujące v . Załóżmy, że relacja R odpowiada modalności \Box_1 , a relacja B odpowiada modalności \Box_2 . Formułę możemy sfalsyfikować w dowolnym świecie struktury \mathfrak{F}_1 . Sfalsyfikujemy ją w świecie 0. Załóżmy, że $(\mathfrak{F}_1, v, 0) \not\models p$. Aby formuła $\Diamond_1(\Box_2p \wedge \neg(\Diamond_1\Box_2q \rightarrow q))$ była prawdziwa w świecie 0 potrzebujemy, aby

$$(\mathfrak{F}_1, v, 1) \models \Box_2p$$

oraz

$$(\mathfrak{F}_1, v, 1) \not\models \Diamond_1\Box_2q \rightarrow q.$$

Wówczas musimy założyć, że

$$(\mathfrak{F}_1, v, i) \models p \text{ dla } i = 1, 2,$$

$$(\mathfrak{F}_1, v, 1) \not\models q$$

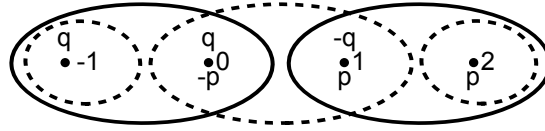
oraz

$$(\mathfrak{F}_1, v, 1) \Vdash \Diamond_1 \Box_2 q.$$

Formuła $\Diamond_1 \Box_2 q$ będzie prawdziwa w świecie 1, gdy

$$(\mathfrak{F}_1, v, j) \Vdash q \text{ dla } j = -1, 0.$$

Niech $\mathfrak{F}'_1 = \langle W', R', B' \rangle$ będzie podstrukturą struktury \mathfrak{F}_1 , gdzie $W' = \{-1, 0, 1, 2\}$, a relacje R' oraz B' są restrykcjami R oraz B , odpowiednio, do zbioru W' . Można zauważyć, że \mathfrak{F}'_1 jest $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ -strukturą. Modelem fałszyfikującym formułę $\Diamond_1(\Box_2 p \wedge \neg(\Diamond_1 \Box_2 q \rightarrow q)) \rightarrow p$ jest $\langle \mathfrak{F}', v' = v|_{W'} \rangle$.



Rysunek 3.3: \mathfrak{F}'_1

System $\text{Log}\{\textcircled{2}\}$ jest systemem tabularnym. Oznacza to, iż istnieje skończona struktura Kripkego, która charakteryzuje ten system. Na podstawie powyższego przykładu można zauważyć, że fuzja systemów tabularnych nie musi być systemem tabularnym. Pokażemy, że nie istnieje skończona struktura charakteryzująca system $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$. Istotnie, niech \mathfrak{F} będzie skończoną $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ -strukturą spójną. Wówczas istnieje taka liczba naturalna n , że pomiędzy dowolnymi dwoma światami struktury \mathfrak{F} istnieje ścieżka długości co najwyżej n . W strukturze o takiej własności operatory modalne komutują. Oznacza to, że formuła

$$\Box_{i_1}, \dots, \Box_{i_{n+1}} p \rightarrow \Box_{i_1}, \dots, \Box_{i_{n+1}} \Box_{i_{n+2}}, \dots, \Box_{i_{n+1+k}} p$$

jest prawdziwa w \mathfrak{F} dla każdej liczby naturalnej k . Formuła ta nie jest jednak tezą systemu $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$, ponieważ można ją sfalsyfikować w świecie 0 struktury \mathfrak{F}_1 . W tym celu wystarczy dobrać wartościowanie $v(p) = \{-n - 1, -n, \dots, n, n + 1\}$. Do problemu tabularności wrócimy jeszcze później.

W kolejnym przykładzie opiszemy strukturę charakteryzującą fuzję dwóch systemów jednomodalnych $S5$. System ten wraz z $S1, S2, S3$ oraz $S4$ został opisany przez twórcę pierwszych systemów modalnych C.I.Lewisa. Obok systemu $S4$ jest to jeden z najbardziej znanych i najchętniej opisywanych systemów jednomodalnych.

System ($S5 \otimes S5$).

Dwumodalny system $S5 \otimes S5$ jest najmniejszym systemem, który zawiera aksjomaty

$$K^i \quad \Box_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\psi)$$

$$T^i \quad \Box_i\varphi \rightarrow \varphi$$

$$4^i \quad \Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\Box_i\varphi$$

$$B^i \quad \Diamond_i\Box_i\varphi \rightarrow \varphi$$

dla $i = 1, 2$, jest domknięty na regułę odrywania

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi} \quad (MP)$$

oraz reguły konieczności (generalizacji)

$$\frac{\varphi}{\Box_i\varphi} \quad (RN_i)$$

dla $i = 1, 2$. Indeks górny i w symbolu aksjomatu określa przyporządkowanie aksjomatu do i -tej modalności. Na przykład symbolem 4^1 oznaczać będziemy aksjomat

$$\Box_1\varphi \rightarrow \Box_1\Box_1\varphi.$$

Przypomnijmy, iż jednomodalny system $S5$ jest charakteryzowany przez rodzinę skończonych klastrow

$$\mathcal{C} = \{ \langle \{0, 1, \dots, n\}, R \rangle : n \in \mathbb{N}_0, R \text{ jest relacją pełną} \}.$$

Zgodnie z Lematem 3.1 domknięcie rodziny \mathcal{C} na skończone sumy rozłączne i izomorficzne kopie nie zmienia charakteryzowanego systemu. Niech \mathcal{C}' będzie wymagany domknięciem. Z Twierdzenia 2.1 wynika, że system $S5 \otimes S5$ jest charakteryzowany przez klasę $\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$ skończonych struktur postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których S_1 oraz S_2 są relacjami równoważności. Następnie z Lematu 3.3 wynika, że wystarczy ograniczyć się do klasy struktur spójnych $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Innymi słowy, prawdziwa jest równoważność:

$$S5 \otimes S5 \vdash \varphi \iff CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (3.2)$$

Przykładem $S5$ -struktury z punktem \mathcal{C} -startowym jest $\langle \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rangle$, to znaczy przeliczalny nieskończony klastrow. Rolę punktu \mathcal{C} -startowego może pełnić dowolny element tego klastra. Niech 0 będzie takim punktem. Jeśli

0 odwzorujemy na dowolny element klastra skończonego, to rozszerzeniem p -morficznym będzie dowolne odwzorowanie surjektywne. Przy pomocy $S5$ -struktury z punktem \mathcal{C} -startowym skonstruujemy $S5 \otimes S5$ -strukturę Kripkego $\mathfrak{F}_2 = \langle W, R, B \rangle$, którą można p -morficznie odwzorować na dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, światy szukanej struktury opisane będą przy pomocy skończonych ciągów elementów struktury z punktem \mathcal{C} -startowym, których długość wynosić co najmniej dwa. Dokładniej, zbiorem światów struktury $\mathfrak{F}_2 = \langle W, R, B \rangle$ jest

$$W = \{(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) : n \in \{2, 3, \dots\}, a_1 \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz } a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}\},$$

a R oraz B są relacjami binarnymi na W działającymi w następujący sposób:

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)R(b_1, \dots, b_{m-1}, 0) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy:}$$

- $n = m = 2$ lub
- $2 < m = n$ są parzyste oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{n-2} = b_{n-2}$ lub
- $m = n$ są nieparzyste oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest nieparzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$.

$$(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)B(b_1, \dots, b_{m-1}, 0) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy:}$$

- $m = n$ są parzyste oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ lub
- $m = n$ są nieparzyste oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{n-2} = b_{n-2}$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest parzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$.

Obydwie relacje są relacjami równoważności, a struktura \mathfrak{F}_2 jest spójna. Opiszmy więc dokładniej budowę struktury \mathfrak{F}_2 . Zaczniemy od nazwania jej klastrów. Niech R^0 oznacza R -klaster złożony z wszystkich ciągów długości 2. Przez B^{a_1} będzie oznaczony B -klaster złożony z wszystkich ciągów długości 2 oraz 3, których pierwszym wyrazem jest $a_1 \in \mathbb{N}_0$. Następnie niech R^{a_1, a_2} oznacza R -klaster złożony z wszystkich ciągów długości 3 oraz 4, które zaczynają się od $a_1 \in \mathbb{N}_0, a_2 \in \mathbb{N}$. Ogólnie, dla wszystkich $l \in \{1, 3, 5, \dots\}$, niech B^{a_1, \dots, a_l} oznacza B -klaster złożony z ciągów długości $l + 1$ oraz $l + 2$, których początkowymi wyrazami są $a_1 \in \mathbb{N}_0, a_2 \in \mathbb{N}, \dots, a_l \in \mathbb{N}$. Analogicznie, dla wszystkich $l \in \{2, 4, 6, \dots\}$, niech R^{a_1, \dots, a_l} oznacza R -klaster złożony z ciągów długości $l + 1$ oraz $l + 2$, których początkowymi wyrazami są $a_1 \in \mathbb{N}_0, a_2 \in \mathbb{N}, \dots, a_l \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że zbiory $R^0 \cap B^{a_1}, R^{a_1, \dots, a_k} \cap B^{a_1, \dots, a_{k-1}}$ oraz $B^{a_1, \dots, a_{k+1}} \cap R^{a_1, \dots, a_k}$ są jednoelementowe dla $k \in \{2, 4, 6, \dots\}$. Natomiast zbiory $R^0 \setminus B^{a_1}, R^{a_1, \dots, a_k} \setminus B^{a_1, \dots, a_{k-1}}$ oraz $B^{a_1, \dots, a_{k+1}} \setminus R^{a_1, \dots, a_k}$ są nieskończone

dla $k \in \{2, 4, 6, \dots\}$. W innych przypadkach zdefiniowane powyżej zbiory mają puste przekroje. To znaczy:

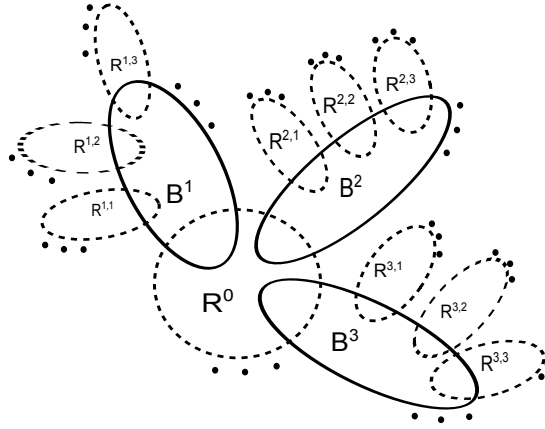
$$R^0 \cap B^{a_1} = \{(a_1, 0)\} \text{ dla } a_1 \in \mathbb{N}_0.$$

Dla l nieparzystego mamy:

$$B^{a_1, \dots, a_l} \cap R^{a_1, \dots, a_l, a_{l+1}} = \{(a_1, \dots, a_{l+1}, 0)\} \text{ dla } a_1 \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz } a_2, \dots, a_{l+1} \in \mathbb{N}.$$

Z kolei dla l parzystego:

$$R^{a_1, \dots, a_l} \cap B^{a_1, \dots, a_l, a_{l+1}} = \{(a_1, \dots, a_{l+1}, 0)\} \text{ dla } a_1 \in \mathbb{N}_0 \text{ oraz } a_2, \dots, a_{l+1} \in \mathbb{N}.$$



Rysunek 3.4: \mathfrak{F}_2

Relacja R (odpowiadająca operatorowi \Box_1) oraz B (odpowiadająca operatorowi \Box_2) są relacjami równoważności, stąd otrzymujemy $\mathfrak{F}_2 \models T^i, 4^i, B^i$, $i = 1, 2$. Innymi słowy, \mathfrak{F}_2 jest $S5 \otimes S5$ -strukturą.

Aby wykazać, że \mathfrak{F}_2 charakteryzuje system $S5 \otimes S5$, strukturę \mathfrak{F}_2 należy p -morficznie przekształcić na dowolną skończoną strukturę spójną, której relacje są relacjami równoważności, to znaczy na dowolną skończoną i spójną $S5 \otimes S5$ -strukturę. Innymi słowy, należy wykazać, że strukturę \mathfrak{F}_2 p -morficznie przekształcimy na dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Ustalmy więc strukturę $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ będącą elementem rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Wybierzmy pewien S_1 -klaster i oznaczmy go S_1^0 . Elementy klastra S_1^0 opiszmy jako $\{x_1, x_2, \dots, x_{t_0}\}$, gdzie t_0 jest liczbą elementów zawartych w klastrze S_1^0 . Niech teraz $S_2^{k_1}$ będzie oznaczeniem S_2 -klastra zawierającego element x_{k_1} ,

gdzie $k_1 \in \{1, \dots, t_0\}$. Elementy klastra $S_2^{k_1}$, dla $k_1 \in \{1, \dots, t_0\}$, nazwiemy $\{x_{k_1,1}, x_{k_1,2}, \dots, x_{k_1,t_{k_1}}\}$, gdzie t_{k_1} jest liczbą elementów klastra $S_2^{k_1}$. W podobny sposób opisujemy S_1 -klastry, które mają niepusty przekrój z klastrem $S_2^{k_1}$, $k_1 \in \{1, \dots, t_0\}$. Przez $S_1^{k_1,k_2}$ oznaczmy S_1 -klastery, który zawiera element x_{k_1,k_2} , gdzie $k_1 \in \{1, \dots, t_0\}$ oraz $k_2 \in \{1, \dots, t_{k_1}\}$. Wszystkie elementy klastra $S_1^{k_1,k_2}$ nazwiemy $\{x_{k_1,k_2,1}, x_{k_1,k_2,2}, \dots, x_{k_1,k_2,t_{k_1,k_2}}\}$ (t_{k_1,k_2} jest liczbą elementów klastra $S_1^{k_1,k_2}$). Przypuśćmy, że

$$S_2^{k_1,\dots,k_l} = \{x_{k_1,\dots,k_l,1}, \dots, x_{k_1,\dots,k_l,t_{k_1,\dots,k_l}}\}$$

jest już opisany dla pewnej liczby $l \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Wówczas

$$S_1^{k_1,\dots,k_l,k_{l+1}} = \{x_{k_1,\dots,k_{l+1},1}, \dots, x_{k_1,\dots,k_{l+1},t_{k_1,\dots,k_{l+1}}}\}$$

jest opisem S_1 -klastra zawierającego element $x_{k_1,\dots,k_{l+1}}$ dla $k_{l+1} \in \{1, \dots, t_{k_1,\dots,k_l}\}$, gdzie $t_{k_1,\dots,k_{l+1}}$ jest liczbą elementów zawartych w klastrze $S_1^{k_1,\dots,k_l,k_{l+1}}$. Analogicznie postępujemy, gdy posiadamy opis klastra

$$S_1^{k_1,\dots,k_l} = \{x_{k_1,\dots,k_l,1}, \dots, x_{k_1,\dots,k_l,t_{k_1,\dots,k_l}}\}$$

dla pewnej liczby $l \in \{2, 4, 6, \dots\}$. Wówczas

$$S_2^{k_1,\dots,k_l,k_{l+1}} = \{x_{k_1,\dots,k_{l+1},1}, \dots, x_{k_1,\dots,k_{l+1},t_{k_1,\dots,k_{l+1}}}\}$$

jest opisem S_2 -klastra zawierającego element $x_{k_1,\dots,k_{l+1}}$ dla $k_{l+1} \in \{1, \dots, t_{k_1,\dots,k_l}\}$, przy czym $t_{k_1,\dots,k_{l+1}}$ jest liczbą elementów zawartych w klastrze $S_2^{k_1,\dots,k_l,k_{l+1}}$.

Określmy odwzorowanie $f: W \rightarrow V$ w następujący sposób:

$$f((a_1, \dots, a_{l-1}, 0)) = x_{k_1,\dots,k_{l-1}},$$

gdzie

$$k_1 = \max\{1, \min\{a_1, t_0\}\}$$

oraz

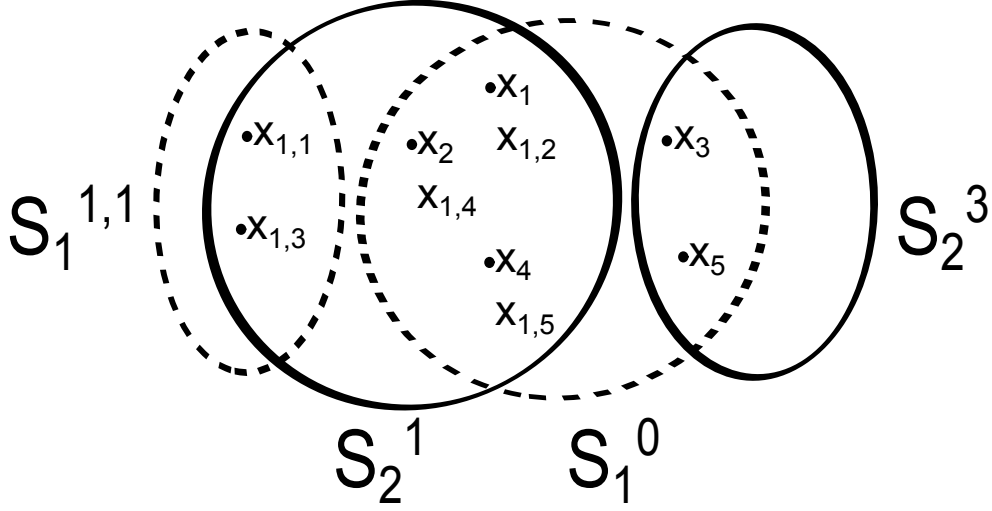
$$k_i = \min\{a_i, t_{k_1,\dots,k_{i-1}}\} \text{ dla } i \in \{2, \dots, l-1\}.$$

Aby zakończyć argumentację, iż struktura \mathfrak{F}_2 charakteryzuje system $S5 \otimes S5$ należy wykazać, że odwzorowanie f jest p -morfizmem. Oczywiście

$$x_{k_1,\dots,k_{l-1}} = f((k_1, \dots, k_{l-1}, 0)).$$

Przed formalnym dowodem rozważymy przykład przekształcania struktury \mathfrak{F}_2 na konkretną, mniej skomplikowaną $S5 \otimes S5$ -strukturę. Niech $\mathfrak{B} =$

$\langle V, S_1, S_2 \rangle$ będzie skończoną $S5 \otimes S5$ -strukturą spójną, której fragment jest przedstawiony poniżej (3.5).



Rysunek 3.5: \mathfrak{B}

Klaster S_1^0 ma niepusty przekrój z dwoma S_2 -klastrami. Niech $S_1^0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Wówczas $t_0 = 5$. S_2 -klaster, do którego należy element x_1 oznaczamy S_2^1 . Zauważmy, że $S_1^0 \cap S_2^1 = \{x_1, x_2, x_4\}$, więc klaster S_2^1 posiada również oznaczenie S_2^2 oraz S_2^4 . Podobnie, S_2 -klaster, do którego należy x_3 oznaczamy S_2^3 . Innym jego oznaczeniem jest też S_2^5 . Co więcej, nie ma innych S_2 -klastrow, które mają niepusty przekrój z S_1^0 . Poniżej opisano działanie przekształcenia f na elementach klastra R^0 .

$$\begin{aligned}
 f(R^0 \cap B^0) &= f((0, 0)) = x_1 \in S_2^1, \\
 f(R^0 \cap B^1) &= f((1, 0)) = x_1 \in S_2^1, \\
 f(R^0 \cap B^2) &= f((2, 0)) = x_2 \in S_2^1, \\
 f(R^0 \cap B^3) &= f((3, 0)) = x_3 \in S_2^2, \\
 f(R^0 \cap B^4) &= f((4, 0)) = x_4 \in S_2^1, \\
 f(R^0 \cap B^5) &= f((5, 0)) = x_5 \in S_2^2, \\
 f(R^0 \cap B^{a_1}) &= f((a_1, 0)) = x_5 \in S_2^2 \text{ dla } a_1 \geq 6.
 \end{aligned}$$

Zatem $f(R^0) = S_1^0$.

Następnie rozważmy klaster S_2^1 . Zawiera on pięć elementów, więc $t_1 = 5$. Elementy x_1, x_2, x_4 otrzymują nowe nazwy $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4}, x_{1,5}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} f(B^1 \cap R^{1,0}) &= f((1, 0, 0)) = x_{1,1}, \\ f(B^1 \cap R^{1,1}) &= f((1, 1, 0)) = x_{1,1}, \\ f(B^1 \cap R^{1,2}) &= f((1, 2, 0)) = x_{1,2}, \\ f(B^1 \cap R^{1,3}) &= f((1, 3, 0)) = x_{1,3}, \\ f(B^1 \cap R^{1,4}) &= f((1, 4, 0)) = x_{1,4}, \\ f(B^1 \cap R^{1,5}) &= f((1, 5, 0)) = x_{1,5}, \end{aligned}$$

$$f(B^1 \cap R^{1,a_1}) = f((1, a_2, 0)) = x_{1,5} \text{ dla } a_2 \geq 6.$$

Zatem $f(B^1) = S_2^1$. Opis światów struktury \mathfrak{B} pozwala w stosunkowo prosty sposób zadać przekształcenie, które odwzorowuje R -klastry struktury \mathfrak{F}_2 na S_1 -klastry struktury \mathfrak{B} oraz B -klastry struktury \mathfrak{F}_2 na S_2 -klastry struktury \mathfrak{B} .

Wróćmy więc do formalnego dowodu. Wykażemy, że odwzorowanie f spełnia warunki p -morfizmu. Aby zweryfikować pierwszy warunek p -morfizmu weźmy dowolne światy $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0), (b_1, \dots, b_{m-1}, 0) \in W$, dla których $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)R(b_1, \dots, b_{m-1}, 0)$. Rozważymy następujące przypadki:

- Przypadek I ($n = m = 2$)

Wówczas $f((a_1, 0)) \in S_1^0$ oraz $f((b_1, 0)) \in S_1^0$. Zatem

$$f((a_1, 0))S_1f((b_1, 0)).$$

- Przypadek II ($2 < n = m$ jest parzyste oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{n-2} = b_{n-2}$)

Wtedy

$$f((a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 0)) = x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}},$$

gdzie $k_1 = \max\{1, \min\{a_1, t_0\}\}$, $k_i = \min\{a_i, t_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, n-1\}$ oraz

$$f((a_1, \dots, a_{n-2}, b_{n-1}, 0)) = x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k'_{n-1}},$$

gdzie $k_1 = \max\{1, \min\{a_1, t_0\}\}$, $k_i = \min\{a_i, t_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, n-2\}$, $k'_{n-1} = \min\{b_{n-1}, t_{k_1, \dots, k_{n-2}}\}$.

Zarówno $x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}}$ jak i $x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k'_{n-1}}$ są elementami klastra $S_1^{k_1, \dots, k_{n-2}}$, więc

$$f((a_1, \dots, a_{n-1}, 0))S_1f((b_1, \dots, b_{n-1}, 0)).$$

- Przypadek III ($n = m$ jest nieparzyste oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$)

Mamy

$$f((a_1, \dots, a_{n-1}, 0)) = f((b_1, \dots, b_{n-1}, 0)),$$

zatem

$$f((a_1, \dots, a_{n-1}, 0))S_1f((b_1, \dots, b_{n-1}, 0)).$$

- Przypadek IV ($k = \min\{n, m\}$ jest nieparzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$)

Założmy, że $k = m$. Wówczas:

$$f((a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 0)) = x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}},$$

gdzie $k_1 = \max\{1, \min\{a_1, t_0\}\}$, $k_i = \min\{a_i, t_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, n-1\}$ oraz

$$f((a_1, \dots, a_{n-2}, 0)) = x_{k_1, \dots, k_{n-2}}.$$

Elementy $x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k_{n-1}}$ oraz $x_{k_1, \dots, k_{n-2}}$ należą do klastra $S_1^{k_1, \dots, k_{n-2}}$, więc

$$f((a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 0))S_1f((a_1, \dots, a_{n-2}, 0)).$$

W celu weryfikacji drugiego warunku p -morfizmu założmy, że

$$f((a_1, \dots, a_{n-1}, 0))S_1x_{m_1, \dots, m_l}$$

oraz $f((a_1, \dots, a_{n-1}, 0)) = x_{k_1, \dots, k_{n-1}}$, gdzie $k_1 = \max\{1, \min\{a_1, t_0\}\}$ oraz $k_i = \min\{a_i, t_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, n-1\}$.

- Przypadek I (n jest nieparzyste)

Ponieważ $x_{k_1, \dots, k_{n-1}} \in S_1^{k_1, \dots, k_{n-1}}$, więc $x_{m_1, \dots, m_l} \in S_1^{k_1, \dots, k_{n-1}}$. Dlatego x_{m_1, \dots, m_l} posiada inny opis, który mówi o jego przynależności do klastra $S_1^{k_1, \dots, k_{n-1}}$. Element ten można opisać jako $x_{k_1, \dots, k_{n-1}, k_n}$ dla pewnego k_n . Wówczas

$$x_{k_1, \dots, k_{n-1}, k_n} = f((a_1, \dots, a_{n-1}, k_n, 0)).$$

Oczywiście $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)R(a_1, \dots, a_{n-1}, k_n, 0)$

- Przypadek II (n jest parzyste)

Podobnie, jak w poprzednim punkcie, $x_{k_1, \dots, k_{n-1}}, x_{m_1, \dots, m_l} \in S_1^{k_1, \dots, k_{n-2}}$. Ponownie używamy opisu, który mówi o przynależności x_{m_1, \dots, m_l} do klastra $S_1^{k_1, \dots, k_{n-2}}$. Element ten posiada opis $x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k'_{n-1}}$. Zatem

$$x_{k_1, \dots, k_{n-2}, k'_{n-1}} = f((a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}, 0))$$

dla pewnego a'_{n-1} . Oczywiście $(a_1, \dots, a_{n-1}, 0)R(a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}, 0)$.

A więc $S5 \otimes S5$ -strukturę \mathfrak{F}_2 można p -morficznie odwzorować na dowolną skończoną $S5 \otimes S5$ -strukturę spójną, czyli na dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Wraz z równoważnością 3.2 oznacza to, że struktura \mathfrak{F}_2 charakteryzuje system $S5 \otimes S5$. \square

Konstrukcja przedstawiona w powyższych przykładach daje się uogólnić na fuzję systemów jednomodalnych, które są charakteryzowane przez pewną rodzinę struktur \mathcal{C} oraz pojedynczą strukturę z punktem \mathcal{C} -startowym. W efekcie otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5. *Niech \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 będą rodzinami struktur spójnych, które charakteryzują systemy jednomodalne L_1 oraz L_2 , odpowiednio. Załóżmy, że \mathfrak{F}^1 jest przeliczalną L_1 -strukturą z punktem \mathcal{C}_1 -startowym oraz \mathfrak{F}^2 jest przeliczalną L_2 -strukturą z punktem \mathcal{C}_2 -startowym. Wówczas istnieje przeliczalna struktura $\mathfrak{F} = \langle W, R, B \rangle$ charakteryzująca system $L_1 \otimes L_2$. Ponadto, spójne składowe struktur $\langle W, R \rangle$ oraz $\langle W, B \rangle$ są izomorficzne z \mathfrak{F}^1 oraz \mathfrak{F}^2 , odpowiednio.*

Dowód. Zgodnie z Lematem 3.1 domknięcie rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 na sumy rozłączne i izomorficzne kopie nie zmienia charakteryzowanego systemu. Niech \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 będą wymaganymi domknięciami rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 , odpowiednio. Zatem $L_1 = \text{Log}\{\mathcal{C}_1\} = \text{Log}\{\mathcal{C}'_1\}$ oraz $L_2 = \text{Log}\{\mathcal{C}_2\} = \text{Log}\{\mathcal{C}'_2\}$. Z Twierdzenia 2.1 wynika, iż system $L_1 \otimes L_2$ jest charakteryzowany przez klasę $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$. Jest to klasa tych struktur $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, których S_1 -spójne składowe są izomorficzne z elementami klasy \mathcal{C}_1 , a S_2 -spójne składowe są izomorficzne z elementami klasy \mathcal{C}_2 . Na mocy Lematu 3.3 można ograniczyć się do struktur spójnych $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Zatem zachodzi równoważność:

$$L_1 \otimes L_2 \vdash \varphi \iff CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (3.3)$$

Niech $\mathfrak{F}^1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ oraz $\mathfrak{F}^2 = \langle W_2, R_2 \rangle$, gdzie $W_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$, a $W_2 = \{b_1, b_2, \dots\}$. Załóżmy, że punkt a_1 jest punktem \mathcal{C}_1 -startowym struktury \mathfrak{F}^1 , natomiast b_1 jest punktem \mathcal{C}_2 -startowym struktury \mathfrak{F}^2 . Rodzina światów struktury \mathfrak{F} będzie zbiorem ciągów złożonych naprzemiennie z elementów zbiorów W_1 oraz W_2 . Dokładniej,

$$W = \{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, c'_{i_{n-1}}, c_1) : n \in \{2, \dots\}, c', c \in \{a, b\} \text{ oraz } c' \neq c, i_1 \in \mathbb{N}, i_2, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

Relacje R oraz B działają w następujący sposób:

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}$, \dots , $b_{i_{n-1}} = b_{j_{n-1}}$ oraz $a_1 R_1 a_1$.

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_{i_{n-1}}R_1a_{j_{n-1}}$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-2}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_{i_{n-1}}R_1a_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_1R_1a_{j_{n-1}}$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-1}} = a_{j_{n-1}}$ oraz $b_1R_2b_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{i_{n-1}}R_2b_{j_{n-1}}$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-2}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{i_{n-1}}R_2b_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_1R_2b_{j_{n-1}}$.

Tak zadana struktura \mathfrak{F} jest spójna. Najpierw jednak zauważmy, że każda jej R -spójna składowa (spójna względem relacji R) jest izomorficzna z \mathfrak{F}^1 . W skład jednej z takich składowych wchodzi wszystkie ciągi długości 2. Wówczas $(a_i, b_1)R(a_j, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy a_iRa_j dla $i, j \in \mathbb{N}$. Zatem izomorfizmem pomiędzy rozważaną R -spójną składową i strukturą \mathfrak{F}^1 jest odwzorowanie $(a_i, b_1) \mapsto a_i$ dla $i \in \mathbb{N}$. Każda inna R -spójna składowa zawiera jeden ciąg postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)$ (nieparzystej długości) i wszystkie ciągi postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)$ dla ustalonych $i_1 \in \mathbb{N}$, $i_2 \in \{2, 3, \dots\} \dots, i_{n-2} \in \{2, 3, \dots\}$ oraz wszystkich $i_{n-1} \in \{2, 3, \dots\}$. Izomorfizm w tym przypadku działa w następujący sposób:

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1) \mapsto a_1,$$

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1) \mapsto a_{i_{n-1}}.$$

Wszystkie ciągi z rozpatrywanej R -spójnej składowej mają te same elementy do miejsca $n - 2$. Poniżej opisujemy działanie relacji R na elementach danej składowej w zależności od działania relacji R_1 na obrazach zadanego odwzorowania:

$$\underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)}_{\mapsto a_1} R \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)}_{\mapsto a_1} \iff a_1 R_1 a_1,$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)}_{\mapsto a_{i_{n-1}}} R \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1)}_{\mapsto a_{j_{n-1}}} \iff a_{i_{n-1}} R_1 a_{j_{n-1}}, \\
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)}_{\mapsto a_{i_{n-1}}} R \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)}_{\mapsto a_1} \iff a_{i_{n-1}} R_1 a_1, \\
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)}_{\mapsto a_1} R \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)}_{\mapsto a_{i_{n-1}}} \iff a_1 R_1 a_{i_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, iż każda R -spójna składowa struktury \mathfrak{F} jest izomorficzna z strukturą \mathfrak{F} . Aby pokazać, że każda B -spójna składowa struktury \mathfrak{F} jest izomorficzna z \mathfrak{F}^2 należy postępować analogicznie. Tak więc, każda B -spójna składowa zawiera jeden ciąg postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)$ (parzystej długości) i wszystkie ciągi postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)$ dla ustalonych

$$i_1 \in \mathbb{N}, i_2 \in \{2, 3, \dots\} \dots, i_{n-2} \in \{2, 3, \dots\}$$

oraz wszystkich $i_{n-1} \in \{2, 3, \dots\}$. Zależność pomiędzy relacjami B oraz R_2 jest opisana powyżej. Wymagany izomorfizm działa następująco:

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1) \mapsto b_1,$$

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1) \mapsto b_{i_{n-1}}.$$

Ciągi wchodzące w skład danej B -spójnej składowej mają te same elementy do miejsca $n-2$. Aby zakończyć dowód, że zadane odwzorowanie jest izomorfizmem przekształcającym rozpatrywaną B -spójną składową na strukturę \mathfrak{F}^2 , rozważmy działanie relacji B w zależności od działania relacji R_2 :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)}_{\mapsto b_1} B \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)}_{\mapsto b_1} \iff b_1 R_2 b_1, \\
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)}_{\mapsto b_{i_{n-1}}} B \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{j_{n-1}}, a_1)}_{\mapsto b_{j_{n-1}}} \iff b_{i_{n-1}} R_2 b_{j_{n-1}}, \\
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)}_{\mapsto b_{i_{n-1}}} B \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)}_{\mapsto b_1} \iff b_{i_{n-1}} R_2 b_1, \\
 & \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)}_{\mapsto b_1} B \underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)}_{\mapsto b_{i_{n-1}}} \iff b_1 R_2 b_{i_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Aby udowodnić, że struktura \mathfrak{F} jest spójna zauważmy, iż każdy ciąg należy do pewnej spójnej składowej. Bez straty ogólności możemy założyć, że rozpatrywany ciąg jest postaci

$$\underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)}_n$$

dla pewnej nieparzystej liczby naturalnej n . Zatem istnieje ścieżka względem relacji B oraz B^{-1} pomiędzy tym ciągiem oraz ciągiem

$$\underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)}_{n-1}$$

pełniącym rolę punktu \mathcal{C} -startowego danej B -spójnej składowej. Następnie, istnieje ścieżka względem relacji R oraz R^{-1} łącząca ciągi

$$\underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)}_{n-1}$$

oraz

$$\underbrace{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-3}}, a_1)}_{n-2}.$$

Analogicznie postępując znajdziemy ścieżkę względem relacji R , B , R^{-1} oraz B^{-1} łączącą dowolny ciąg z pewnym ciągiem długości 2. Przypomnijmy, że wszystkie ciągi długości 2 są elementami pewnej R -spójnej składowej. Oznacza to, że pomiędzy dowolnymi dwoma ciągami długości 2 istnieje ścieżka względem relacji R oraz R^{-1} . Stąd, dowolne dwa ciągi można połączyć ścieżką względem relacji R , B , R^{-1} oraz B^{-1} , która zawiera pewne ciągi długości 2. Oznacza to, że struktura \mathfrak{F} jest strukturą spójną.

Z faktu, iż każda spójna składowa struktury $\langle W, R \rangle$ jest izomorficzna z \mathfrak{F}^1 oraz każda spójna składowa struktury $\langle W, B \rangle$ jest izomorficzna z \mathfrak{F}^2 wnioskujemy, że \mathfrak{F} jest $L_1 \otimes L_2$ -strukturą. Innymi słowy, prawdziwa jest implikacja:

$$L_1 \otimes L_2 \vdash \varphi \implies \mathfrak{F} \Vdash \varphi. \quad (3.4)$$

Aby zakończyć dowód opiszemy p -morfizm struktury \mathfrak{F} na dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$, czyli na dowolną strukturę spójną $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, której każda S_1 -spójna składowa jest izomorficzna z pewnym elementem rodziny \mathcal{C}_1 , a każda S_2 -spójna składowa jest izomorficzna z pewnym elementem rodziny \mathcal{C}_2 . Niech $f((a_1, b_1))$ będzie dowolnym elementem uniwersum V . Punkt $f((a_1, b_1))$ należy do pewnej spójnej składowej struktury $\langle V, S_1 \rangle$. Wówczas R -spójną składową struktury \mathfrak{F} zawierającą punkt (a_1, b_1) , to znaczy zbiór wszystkich elementów postaci (a_i, b_1) dla $i \in \mathbb{N}$, można p -morficznie odwzorować na S_1 -spójną składową struktury \mathfrak{B} zawierającą punkt $f((a_1, b_1))$. Następnie rozpatrzmy S_2 -spójne składowe struktury \mathfrak{B} zawierające punkty postaci $f((a_i, b_1))$ dla $i \in \mathbb{N}$. Wybierzmy dowolne $i_0 \in \mathbb{N}$. B -spójna składowa struktury \mathfrak{F} zawierająca punkt (a_{i_0}, b_1) , to jest zbiór, w którego skład wchodzi (a_{i_0}, b_1) oraz wszystkie elementów postaci (a_{i_0}, b_j, a_1) dla $j \in \{2, 3, \dots\}$, może zostać p -morficznie odwzorowana na S_2 -spójną składową struktury \mathfrak{B} zawierającą punkt $f((a_{i_0}, b_1))$. W ten sposób odwzorowanie f zostaje rozszerzone

na kolejne spójne składowe struktury \mathfrak{F} . W następnym kroku skupiamy się na R -spójnych składowych zawierających elementy postaci (a_i, b_j, a_1) , $i \in \mathbb{N}, j \in \{2, 3, \dots\}$. Ogólnie, jeśli częściowy p -morfizm jest określony dla elementu postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, b_{i_{n-10}}, a_1)$, a tym samym dla wszystkich krótszych ciągów, to odwzorowanie można rozszerzyć na R -spójną składową struktury \mathfrak{F} zawierającą ten punkt. Zatem odwzorowanie f zostanie rozszerzone na punkty postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, b_{i_{n-10}}, a_{i_n}, b_1)$ dla $i_n \in \{2, 3, \dots\}$. Jeśli częściowy p -morfizm jest określony dla elementu postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, a_{i_{n-10}}, b_1)$, to f można rozszerzyć na B -spójną składową struktury \mathfrak{F} zawierającą ten punkt. Czyli na wszystkie punkty postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, a_{i_{n-10}}, b_{i_n}, a_1)$ dla $i_n \in \{2, 3, \dots\}$. Rozszerzając odwzorowanie f na kolejne R i S -spójne składowe, otrzymujemy p -morfizm przekształcający strukturę \mathfrak{F} na strukturę \mathfrak{B} . To oznacza prawdziwość poniższej implikacji:

$$\mathfrak{F} \Vdash \varphi \implies CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (3.5)$$

Implikacje 3.4, 3.5 oraz równoważność 3.3 dowodzą, iż struktura \mathfrak{F} charakteryzuje system $L_1 \otimes L_2$. \square

3.2 Zastosowania konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym

Niniejszą część rozprawy poświęcimy zastosowaniom konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym, której dokładny opis zawarty został w dowodzie Twierdzenia 3.5.

System ($Grz.3 \otimes Grz.3$).

Dwumodalny system $Grz.3 \otimes Grz.3$ jest najmniejszym systemem, który zawiera aksjomaty K^i , T^i , 4^i , $\cdot 3^i$ oraz Grz^i i jest domknięty na regułę odrywania MP oraz regułę konieczności (generalizacji) RN_i , $i = 1, 2$.

Przypomnijmy, iż jednomodalny system $Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę skończonych łańcuchów $\mathcal{C} = \{\langle \{1, \dots, n\}, \geq \rangle : n \in \mathbb{N}\}$. Jako $Grz.3$ -strukturę z punktem \mathcal{C} -startowym rozważmy $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^2 = \langle W_1, \leq \rangle$, gdzie

$$W_1 = \left\{ -\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{-1, 0\}.$$

Wówczas punktem \mathcal{C} -startowym tej struktury jest 0. Aby to wykazać, dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ rozważmy skończony łańcuch $\mathbf{n}_0 = \langle \{1, \dots, n_0\}, \geq \rangle$. Niech

$h(0) = k_0$. Odwzorowanie $h: \{0\} \rightarrow \mathbf{n}_0$ rozszerzymy do p -morfizmu w następujący sposób:

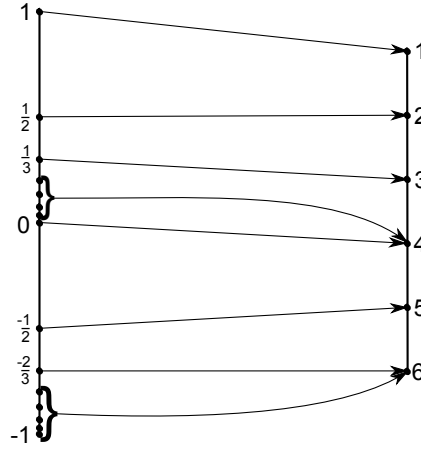
$$h\left(\frac{1}{n}\right) = \min\{n, k_0\} \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

$$h\left(-\frac{n}{n+1}\right) = \min\{n_0, k_0 + n\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$h(-1) = n_0.$$

Na przykład, dla $n_0 = 6$ odwzorowanie h obrazuje poniższy diagram.



Rysunek 3.6: $\mathfrak{F}^1 \rightarrow \langle \{1, \dots, 6\}, \geq \rangle$

Na podstawie tabeli zamieszczonej w podrozdziale 1.3 można uzasadnić prawdziwość aksjomatów systemu $Grz.3$ w strukturze \mathfrak{F}^1 . Struktura \mathfrak{F}^1 jest zwrotna, zatem $\mathfrak{F}^1 \models T$, przechodnia, więc $\mathfrak{F}^1 \models 4$. Ponadto nie istnieje nieskończony ciąg x_1, x_2, \dots , w którym $x_j R x_{j+1}$ oraz $x_j \neq x_{j+1}$ dla $j \in \mathbb{N}$. Stąd, $\mathfrak{F}^1 \models Grz$. Zbiór W_1 jest liniowo uporządkowany, więc $\mathfrak{F}^1 \models \cdot 3$. Oznacza to, że struktura \mathfrak{F}^1 jest $Grz.3$ -strukturą.

Rozważmy domknięcie \mathcal{C}' rodziny \mathcal{C} na skończone sumy rozłączne oraz izomorficzne kopie. Wtedy \mathcal{C}' również charakteryzuje system $Grz.3$, co wynika z Lematu 3.1. Zgodnie z Twierdzeniem 2.1 system $Grz.3 \otimes Grz.3$ jest charakteryzowany przez rodzinę $\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$ skończonych struktur $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są skończonymi łańcuchami. Co więcej, Lemat 3.3 pozwala na rozważanie podrodziny $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$ rodziny $\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$, w której skład wchodzi tylko struktury spójne. Rodzina ta charakteryzuje system $Grz.3 \otimes Grz.3$.

Za pomocą konstrukcji z punktem \mathcal{C} -startowym uzyskamy strukturę $\mathfrak{F}_3 = \langle W, R, B \rangle$, w której

$$W = \{(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) : n \geq 2, p_1 \in \{-\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 0\},$$

$$p_k \in \{-\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\}\}.$$

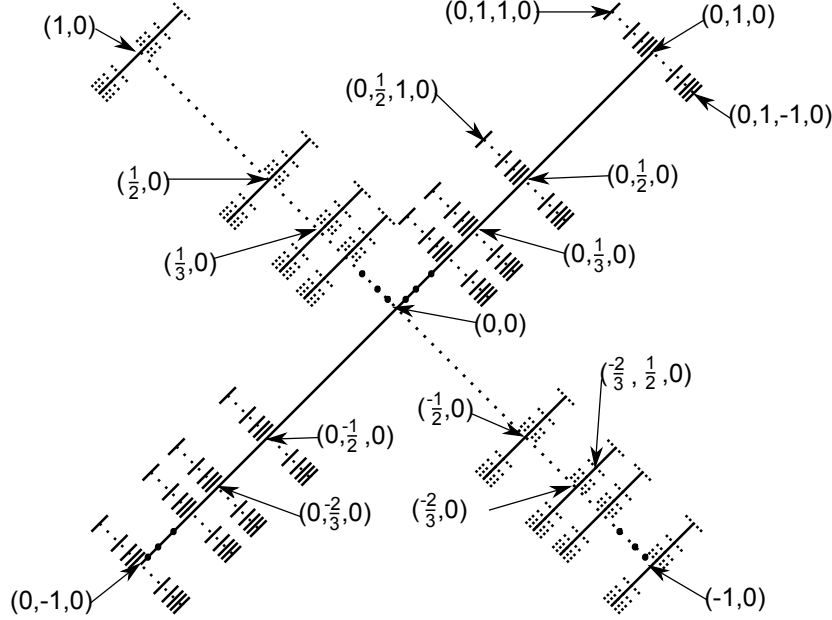
Relacje R oraz B są relacjami binarnymi na W (Rysunek 3.7) działającymi następująco:

$(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)R(q_1, \dots, q_{m-1}, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $n = m$ są parzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-2} = q_{n-2}$ oraz $p_{n-1} \leq q_{n-1}$ lub
- $n = m$ są nieparzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-1} = q_{n-1}$ lub
- $n - 1 = m$ oraz n jest parzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leq n - 2$, $p_{n-1} < 0$ lub
- $n = m - 1$ oraz m jest parzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leq m - 2$, $0 < q_{m-1}$.

$(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)B(q_1, \dots, q_{m-1}, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $n = m$ są parzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-1} = q_{n-1}$ lub
- $n = m$ są nieparzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-2} = q_{n-2}$ oraz $p_{n-1} \leq q_{n-1}$ lub
- $n - 1 = m$ oraz n jest nieparzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leq n - 2$, $p_{n-1} < 0$ lub
- $n = m - 1$ oraz m jest nieparzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leq m - 2$, $0 < q_{m-1}$.

Rysunek 3.7: \mathfrak{F}_3

Jedna R -spójna składowa zawiera wszystkie ciągi długości 2. W tym przypadku izomorfizm działa następująco $(p_1, 0) \mapsto p_1$. Natomiast, pozostałe R -spójne składowe zawierają jeden ciąg postaci $(p_1, \dots, p_{n-2}, 0)$ oraz wszystkie ciągi postaci $(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$ dla pewnego n parzystego. Wszystkie ciągi wchodzące w skład danej R -spójnej składowej mają te same elementy do miejsca $n - 2$. Izomorfizm pomiędzy taką R -spójną składową a strukturą \mathfrak{F}^1 działa następująco $(p_1, \dots, p_{n-2}, 0) \mapsto 0$ oraz $(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) \mapsto p_{n-1}$. Zauważmy, że każda B -spójna składowa zawiera jeden ciąg postaci $(p_1, \dots, p_{n-2}, 0)$ oraz wszystkie ciągi postaci $(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$ dla pewnego n nieparzystego. Wszystkie ciągi wchodzące w skład danej B -spójnej składowej mają te same elementy do miejsca $n - 2$. Stąd izomorfizm określony na takich B -spójnych składowych jest opisany identycznie jak izomorfizm na R -spójnych składowych. Więc $\mathfrak{F}_3 \models T^i, 4^i, Grz^i$ oraz $\mathfrak{F}_3 \models \cdot 3^i$ dla $i = 1, 2$. Oznacza to, że \mathfrak{F}_3 jest $Grz.3 \otimes Grz.3$ -strukturą. Innymi słowy, prawdziwa jest poniższa implikacja:

$$Grz.3 \otimes Grz.3 \vdash \varphi \implies \mathfrak{F}_3 \Vdash \varphi. \quad (3.6)$$

Aby wykazać prawdziwość implikacji przeciwnej, należy udowodnić, że strukturę \mathfrak{F}_3 można p -morficznie odwzorować na dowolną strukturę spójną $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w której S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są skończonymi

łańcuchami. Analiza kilku szczególnych przypadków pomoże w zrozumieniu formalnego dowodu. Ustalmy skończoną strukturę spójną $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w której S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są skończonymi łańcuchami. Wybierzmy dowolny element $x \in V$ i nazwijmy go x_0 . Następnie, niech z będzie takim elementem uniwersum V , że $x_0 S_1 z$ oraz nie istnieje $t \in V \setminus \{z\}$, dla którego $z S_1 t$. Element ten nazwiemy x_1 . Oznaczeniem x_n będzie nazwany element ze zbioru $V \setminus \{x_{n-1}\}$, który jest bezpośrednio przed x_{n-1} (względem relacji S_1) oraz spełnia warunek $x_0 S_1 x_n$ (ewentualnie może to być x_0). Niech x_{-1} będzie następnym opisem elementu x_0 . Wówczas x_{-n} jest opisem elementu ze zbioru $V \setminus \{x_{-(n-1)}\}$, który jest najbliższym elementu $x_{-(n-1)}$ (względem relacji S_1) oraz $x_{-n} S_1 x_{-(n-1)}$. Podobny opis stosujemy dla relacji S_2 . Opis w indeksie różni się dopisaniem zera na początku. Mianowicie, niech z będzie takim elementem uniwersum V , że $x_0 S_2 z$ oraz nie istnieje $t \in V \setminus \{z\}$, dla którego $z S_2 t$. Element ten nazwiemy $x_{0,1}$. Oznaczeniem $x_{0,n}$ będzie nazwany element ze zbioru $V \setminus \{x_{0,n-1}\}$, który jest bezpośrednio przed $x_{0,n-1}$ (względem relacji S_2) oraz spełnia warunek $x_0 S_2 x_{0,n}$ (ewentualnie może to być x_0). Niech $x_{0,-1}$ będzie następnym opisem elementu x_0 . Wtedy $x_{0,-n}$ jest opisem elementu ze zbioru $V \setminus \{x_{0,-(n-1)}\}$, który jest najbliższym elementu $x_{0,-(n-1)}$ (względem relacji S_2) oraz $x_{0,-n} S_2 x_{0,-(n-1)}$.

Następnie przypuśćmy, że nazwaliśmy element $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}$ (n_1 może być równe 0) dla pewnego k nieparzystego. Wówczas elementy będące w relacji S_1 z $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}$ można traktować jako opisane. Niech z będzie takim elementem zbioru V , że $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} S_2 z$ oraz nie istnieje $t \in V \setminus \{z\}$ dla którego $z S_2 t$. Element ten nazwiemy $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, 1}$. Oznaczeniem $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, n}$ będzie nazwany element ze zbioru $V \setminus \{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, n-1}\}$, który jest bezpośrednio przed $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, n-1}$ (względem relacji S_2) oraz spełnia warunek $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} S_2 x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, n}$ (może to być także $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}$). Niech $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, -1}$ będzie następnym opisem elementu $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}$. Wówczas $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, -n}$ jest opisem elementu ze zbioru $V \setminus \{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, -(n-1)}\}$, który jest najbliższym elementu $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, -(n-1)}$ (względem relacji S_2) oraz $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, -n} S_2 x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k, -(n-1)}$. Analogiczny opis stosujemy dla k parzystego oraz relacji S_1 .

W następnym kroku dla każdego elementu uniwersum V definiujemy zbiory poprzedników oraz następników względem relacji S_1 oraz S_2 :

- Dla k parzystych lub $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} = x_0$

$$S_{1x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^+ = \{z \in V : x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} S_1 z\},$$

$$S_{1x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^- = \{z \in V : z S_1 x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}\}.$$

- Dla k nieparzystych

$$S_{2x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^+ = \{z \in V : x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} S_2 z\}$$

oraz

$$S_{2x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^- = \{z \in V : z S_2 x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}\}.$$

Symbolami $m_{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^{S_1+}$, $m_{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^{S_1-}$, $m_{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^{S_2+}$ oraz $m_{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^{S_2-}$ oznaczmy liczbę elementów powyższych zbiorów, odpowiednio.

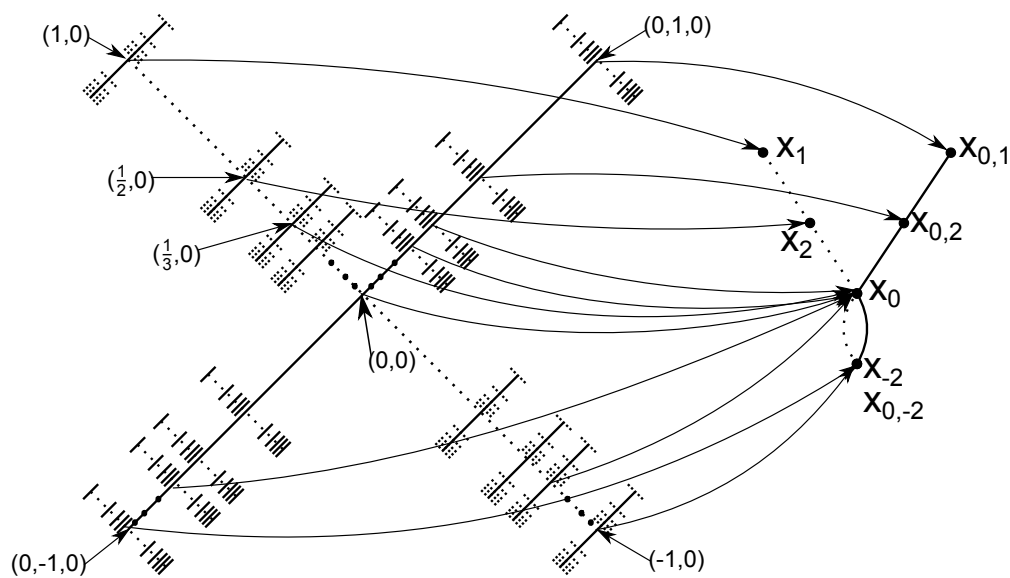
W kolejnym kroku przystępujemy do definiowania p -morfizmu. Niech $f: W \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem zadanym następująco:

$$f((p_1, \dots, p_k, 0)) = x_{o_1, \dots, o_k},$$

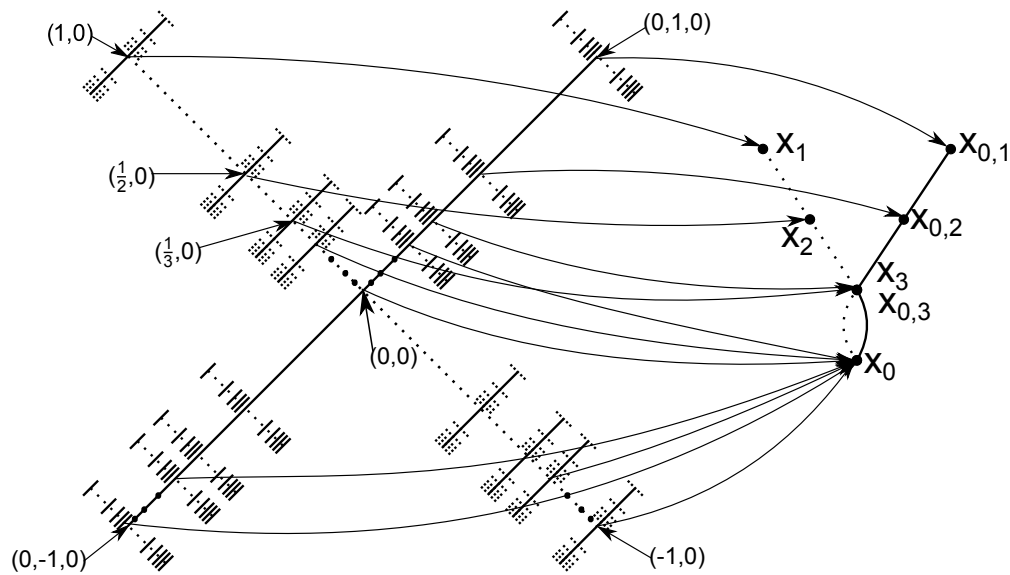
gdzie

- (a) $o_1 = 0$, jeśli $p_1 = 0$,
- (b) $o_i = \min\{n_i, m_{x_{o_1, \dots, o_{i-1}}}^{C+}\}$, jeśli $p_i = \frac{1}{n_i}$,
- (c) $o_i = \max\{-n_i, -m_{x_{o_1, \dots, o_{i-1}}}^{C-}\}$, jeśli $p_i = \frac{-n_i}{n_i+1}$,
- (d) $o_i = -m_{x_{o_1, \dots, o_{i-1}}}^{C-}$, jeśli $p_i = -1$,

gdzie $C = S_1$ dla i nieparzystych oraz $C = S_2$ dla i parzystych. Ponadto, dla $i = 1$ oraz $p_1 \neq 0$ mamy $x_{o_1, \dots, o_{i-1}} = x_0$. Wykażemy, że f jest p -morfizmem. Weźmy element x_{o_1, \dots, o_k} uniwersum V . Wtedy $x_{o_1, \dots, o_k} = f((p_1, \dots, p_k, 0))$, gdzie $p_1 = 0$ dla $o_1 = 0$, $p_i = \frac{1}{n_i}$ jeśli $o_i = n_i$ lub $p_i = \frac{-n_i}{n_i+1}$ jeśli $o_i = -n_i$. Każda R -spójna (B -spójna) składowa struktury \mathfrak{F}_3 jest odwzorowana na pewną S_1 -spójną (S_2 -spójną) składową struktury \mathfrak{B} z zachowaniem porządku. Poniżej rozważymy dwa przykłady, które pokazują, jak można odwzorować początkowe elementy struktury \mathfrak{F}_3 . W przykładzie przedstawionym na Rysunku 3.8 element $f((0, 0))$ nie jest pierwszym elementem struktury \mathfrak{B} . Natomiast w przykładzie przedstawionym na Rysunku 3.9 $f((0, 0))$ jest pierwszym elementem struktury \mathfrak{B} .



Rysunek 3.8: Przykład 1



Rysunek 3.9: Przykład 2

Każdy element w strukturze po prawej stronie posiada nieskończenie wiele nazw. W przykładzie pierwszym (Rysunek 3.8) x_0 jest nazwany między in-

nymi $x_{-1}, x_{0,-1}, x_3, x_{0,3}$. Z kolei w przykładzie drugim (Rysunek 3.9) element x_0 nazwano między innymi $x_{-1}, x_{0,-1}, x_4, x_{0,4}$.

Rozpocznijmy formalny dowód. Aby uzasadnić, że odwzorowanie f jest p -morfizmem należy zweryfikować warunki z definicji p -morfizmu:

Warunek 1) Załóżmy, że

$$(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)R(q_1, \dots, q_{m-1}, 0).$$

Wykażemy, że

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0))S_1f((q_1, \dots, q_{m-1}, 0)).$$

W tym celu należy rozważyć poniższe przypadki:

- Przypadek I ($n = m$ są parzyste, $p_s = q_s$ dla $s \in \{1, \dots, n-2\}$, $p_{n-1} \leq q_{n-1}$)

Zakładamy, że

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{n-1}}.$$

Wtedy

$$f((q_1, \dots, q_{n-1}, 0)) = f((p_1, \dots, p_{n-2}, q_{n-1}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{n-2}, o'_{n-1}}.$$

Niech $p_{n-1} < 0 < q_{n-1}$. Wówczas $o_{n-1} < 0 < o'_{n-1}$. Jeśli $0 < p_{n-1} \leq q_{n-1}$, wówczas $0 < o'_{n-1} \leq o_{n-1}$. Na koniec, gdy $p_{n-1} \leq q_{n-1} < 0$, prawdziwa jest nierówność $o_{n-1} \leq o'_{n-1} < 0$. W każdym z opisanych wariantów zachodzi relacja $x_{o_1, \dots, o_{n-1}}S_1x_{o_1, \dots, o_{n-2}, o'_{n-1}}$. Zatem,

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0))S_1f((q_1, \dots, q_{n-1}, 0)).$$

- Przypadek II ($n = m$ są nieparzyste, $p_s = q_s$ dla $s \in \{1, \dots, n-1\}$)

Wówczas

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0)) = f((q_1, \dots, q_{m-1}, 0)).$$

Relacje R oraz S_1 są zwrotne, więc

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0))S_1f((q_1, \dots, q_{m-1}, 0)).$$

- Przypadek III ($n-1 = m$ oraz n jest parzyste, $p_s = q_s$ dla $s \in \{1, \dots, n-2\}$, $p_{n-1} < 0$)

Wówczas

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{n-1}},$$

gdzie $o_{n-1} < 0$ (ponieważ $p_{n-1} < 0$) oraz

$$f((q_1, \dots, q_{n-2}, 0)) = f((p_1, \dots, p_{n-2}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{n-2}}.$$

Zatem

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0))S_1f((q_1, \dots, q_{n-2}, 0)).$$

- Przypadek IV ($n = m - 1$ oraz m jest parzyste, $p_s = q_s$ dla $s \in \{1, \dots, m - 2\}$, $0 < q_{m-1}$)

Wtedy

$$f((q_1, \dots, q_{m-1}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{m-1}},$$

gdzie $0 < o_{m-1}$ (ponieważ $0 < q_{m-1}$) oraz

$$f((p_1, \dots, p_{n-1}, 0)) = f((q_1, \dots, q_{m-2}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{m-2}}.$$

Stąd

$$f((p_1, \dots, p_{m-2}, 0))S_1f((q_1, \dots, q_{m-1}, 0)).$$

Warunek 2) Pokażemy, że jeśli

$$f((p_1, \dots, p_{m-1}, 0))S_1z,$$

to

$$\exists_t ((p_1, \dots, p_{m-1}, 0)Rt \wedge f(t) = z).$$

Założmy, że $f((p_1, \dots, p_{m-1}, 0)) = x_{o_1, \dots, o_{m-1}}$. Ponownie musimy rozważyć przypadki:

- Przypadek I ($z = x_{o_1, \dots, o_{m-2}, o'_{m-1}}$)

Jeśli $o_{m-1} < 0$, to wówczas $o_{m-1} \leq o'_{m-1}$. Dla $o'_{m-1} < 0$ mamy

$$z = x_{o_1, \dots, o_{m-2}, o'_{m-1}} = f((p_1, \dots, p_{m-2}, \frac{o'_{m-1}}{|o'_{m-1}| + 1}, 0))$$

oraz $p_{m-1} \leq \frac{o'_{m-1}}{|o'_{m-1}| + 1}$. Zatem

$$(p_1, \dots, p_{m-1}, 0)R(p_1, \dots, p_{m-2}, \frac{o'_{m-1}}{|o'_{m-1}| + 1}, 0).$$

Natomiast gdy $0 < o'_{m-1}$, to

$$z = x_{o_1, \dots, o_{m-2}, o'_{m-1}} = f((p_1, \dots, p_{m-2}, \frac{1}{o'_{m-1}}, 0))$$

oraz $p_{m-1} < 0 < \frac{1}{o'_{m-1}}$. Zatem

$$(p_1, \dots, p_{m-1}, 0)R(p_1, \dots, p_{m-2}, \frac{1}{o'_{m-1}}, 0).$$

Jeśli $0 < o_{m-1}$, to wówczas $0 < o'_{m-1} \leq o_{m-1}$. Mamy

$$z = x_{o_1, \dots, o_{m-2}, o'_{m-1}} = f((p_1, \dots, p_{m-2}, \frac{1}{o'_{m-1}}, 0))$$

oraz $p_{m-1} \leq \frac{1}{o'_{m-1}}$. Wtedy

$$(p_1, \dots, p_{m-1}, 0)R(p_1, \dots, p_{m-2}, \frac{1}{o'_{m-1}}, 0).$$

- Przypadek II ($z = x_{o_1, \dots, o_{m-2}}$ oraz m jest parzyste)

Wówczas $o_{m-1} < 0$, czyli $p_{m-1} < 0$ oraz

$$z = x_{o_1, \dots, o_{m-2}} = f((p_1, \dots, p_{m-2}, 0)).$$

Oczywiście

$$(p_1, \dots, p_{m-1}, 0)R(p_1, \dots, p_{m-2}, 0).$$

- Przypadek III ($z = x_{o_1, \dots, o_{m-1}, o_m}$ oraz m jest nieparzyste)

Wtedy $0 < o_m$, więc istnieje $0 < p_m = \frac{1}{o_m}$ oraz

$$z = x_{o_1, \dots, o_{m-1}, o_m} = f((p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, 0)).$$

Naturalnie

$$(p_1, \dots, p_{m-1}, 0)R(p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, 0).$$

Oznacza to, że odwzorowanie f jest p -morfizmem. Czyli prawdziwa jest poniższa implikacja:

$$\mathfrak{F}_3 \Vdash \varphi \implies CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (3.7)$$

Na mocy implikacji (3.6) i (3.7) oraz faktu, iż rodzina $CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$ charakteryzuje system $Grz.3 \otimes Grz.3$ wynika równoważność:

$$Grz.3 \otimes Grz.3 \vdash \varphi \iff \mathfrak{F}_3 \Vdash \varphi.$$

□

Należy również wspomnieć, że w przypadku formuł nie będących tezami systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$ wystarczy rozważyć skończone podstruktury struktury \mathfrak{F}_3 .

Przykład 3.6. Wykażemy, że formuła $\Box_1(\Box_2(p \rightarrow \Box_1 p) \rightarrow p) \rightarrow p$ nie jest tezą systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$. Relacja R odpowiada modalności \Box_1 , a relacja B odpowiada modalności \Box_2 . W tym celu należy znaleźć wartościowanie fałszyfikujące v w strukturze \mathfrak{F}_3 . Naszą formułę sfalsyfikujemy w punkcie $(0, 0)$. Zmienna p musi być sfalsyfikowana w punkcie $(0, 0)$, co symbolicznie zapiszemy $(\mathfrak{F}_3, v, (0, 0)) \not\models p$. Aby formuła $\Box_1(\Box_2(p \rightarrow \Box_1 p) \rightarrow p)$ była prawdziwa w punkcie $(0, 0)$, należy dobrać wartościowanie v tak, aby

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{F}_3, v, (\frac{1}{n}, 0)) \models p,$$

$$(\mathfrak{F}_3, v, (0, \frac{1}{n_0}, 0)) \models p$$

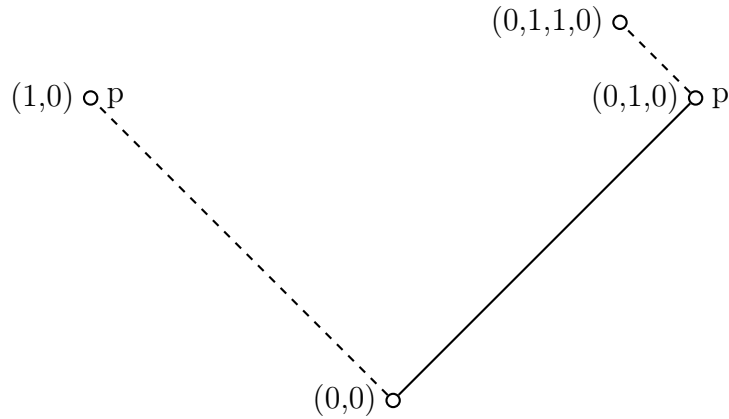
oraz

$$(\mathfrak{F}_3, v, (0, \frac{1}{n_0}, \frac{1}{m_0}, 0)) \not\models p$$

dla pewnych $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy $n_0 = m_0 = 1$. Ze struktury \mathfrak{F}_3 można wybrać podstrukturę $\mathfrak{F}'_3 = \langle W', R', B' \rangle$, w której

$$W' = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0)\},$$

a relacje R' oraz B' są restrykcjami relacji R oraz B do zbioru W' . Struktura \mathfrak{F}'_3 jest skończoną $Grz.3 \otimes Grz.3$ -strukturą, która wraz z wartościowaniem $v' = v|_{W'}$ jest szukanym modelem.



Rysunek 3.10: \mathfrak{F}'_3

System $(S4GrzB_2 \otimes Tr)$.

Przypomnijmy, że system $S4GrzB_2$ jest charakteryzowany przez rodzinę struktur

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathfrak{W}_n = \langle \{0, 1, \dots, n\}, S \rangle : n \in \mathbb{N}\},$$

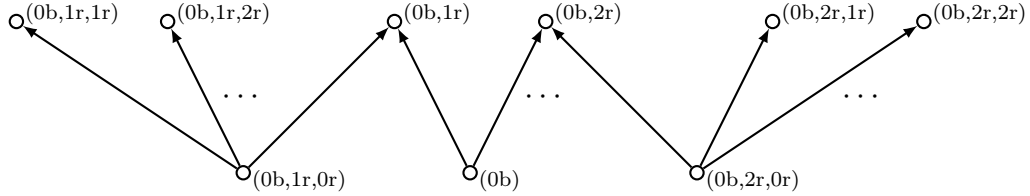
gdzie xSy wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ lub $x = 0$. Ustalmy jeszcze domknięcie \mathcal{C}'_1 rodziny \mathcal{C}_1 na skończone sumy rozłączne oraz izomorficzne kopie. Strukturą z punktem \mathcal{C}_1 -startowym jest $\mathfrak{F}^1 = \langle W_1, R_1 \rangle$, gdzie

$$W_1 = \{(0b, p_2r, \dots, p_nr) : n \leq 3, p_2 \in \mathbb{N}, p_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

a relację R_1 definiujemy następująco:

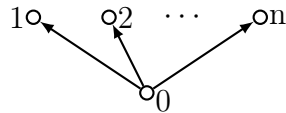
$(0b, p_2r, \dots, p_nr)R_1(0b, q_2r, \dots, q_mr)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $(0b, p_2r, \dots, p_nr) = (0b, q_2r, \dots, q_mr)$ lub
- $n = m$, $p_s = q_s$ dla $s \leq n - 1$, $p_n = 0$ lub
- $n - 1 = m$, $p_s = q_s$ dla $s \leq m$, $p_n = 0$ lub
- $n = m - 1$, $p_s = q_s$ dla $s \leq n$.



Rysunek 3.11: \mathfrak{F}^1

Rolę punktu \mathcal{C}_1 -startowego pełni $(0b)$. Aby wykazać ten fakt, rozważmy strukturę \mathfrak{W}_n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jest to struktura postaci:



Rysunek 3.12: \mathfrak{W}_n

Należy rozpatrzyć dwa następujące przypadki:

- Przypadek I Gdy $f((0b)) = 1$, to szukany p -morfizm definiujemy jako:

$$\begin{aligned} f((0b, ir)) &= 1 \text{ dla } i \in \mathbb{N}, \\ f((0b, ir, 0r)) &= 0 \text{ dla } i \in \mathbb{N}, \\ f((0b, ir, jr)) &= \min\{j, n\} \text{ dla } i, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Przypadek II Gdy $f((0b)) = 0$, to szukane rozszerzenie p -morficzne przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} f((0b, ir)) &= \min\{i, n\} \text{ dla } i \in \mathbb{N}, \\ f((0b, ir, 0r)) &= 0 \text{ dla } i \in \mathbb{N}, \\ f((0b, ir, jr)) &= \min\{j, n\} \text{ dla } i, j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Drugim składnikiem omawianej fuzji jest system Tr . Jest to najmniejszym systemem modalnym, zawierającym aksjomat $\varphi \leftrightarrow \Box\varphi$. System Tr jest charakteryzowany przez strukturę $\circ = \langle \{a\}, \{(a, a)\} \rangle$. Innymi słowy, $Tr = \text{Log}\{\circ\}$. Rozważmy rodzinę $\mathcal{C}_2 = \{ \langle \{a\}, \{(a, a)\} \rangle \}$. Rolę struktury \mathfrak{F}^2 pełni również $\langle \{a\}, \{(a, a)\} \rangle$. Oczywiście punktem \mathcal{C}_2 -startowym jest element a . Niech \mathcal{C}'_2 będzie domknięciem rodziny \mathcal{C}_2 na skończone sumy rozłączne oraz izomorficzne kopie. Rodzina \mathcal{C}'_2 jest rodziną wszystkich struktur skończonych z najmniejszą relacją zwrotną, to znaczy elementy x oraz y są ze sobą w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.

Zgodnie z Twierdzeniem 2.1, system $S4GrzB_2 \otimes Tr$ jest charakteryzowany przez rodzinę $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ skończonych struktur $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których S_1 -spójne składowe są izomorficzne z elementami rodziny \mathcal{C}_1 , a S_2 -spójne składowe są izomorficznymi obrazami struktury $\langle \{a\}, \{(a, a)\} \rangle$. Dodatkowo, Lemmat 3.3 pozwala na ograniczenie się do elementów rodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$, która również charakteryzuje system $S4GrzB_2 \otimes Tr$. Elementy rodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ są izomorficznymi kopiami elementów rodziny

$$\{\mathfrak{W}'_n = \langle \{0, 1, \dots, n\}, S_1, S_2 \rangle : n \in \mathbb{N}\},$$

gdzie xS_1y wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ lub $x = 0$ oraz xS_2y wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ struktura \mathfrak{W}'_n jest wzbogaceniem \mathfrak{W}_n o minimalną relację zwrotną S_2 . Dlatego szukaną strukturą jest $\mathfrak{F}_4 = \langle W, R, B \rangle$, gdzie $\langle W, R \rangle$ jest izomorficzna z \mathfrak{F}^1 , a B jest najmniejszą relacją zwrotną określoną na W . Odwzorowanie p -morficzne z \mathfrak{F}_4 na struktury \mathfrak{W}'_n definiuje się tak samo, jak p -morfizm z \mathfrak{F}^1 na struktury \mathfrak{W}_n . Zachowanie warunków z definicji p -morfizmu dla relacji B oraz S_2 wynika z faktu, iż obydwie są najmniejszymi relacjami zwrotnymi określonymi na W oraz $\{0, 1, \dots, n\}$, odpowiednio. \square

Wartym uwagi jest system opisany przez F. Woltera w [18]. W artykule wskazano zanurzenie kraty $NExt(T)$ normalnych rozszerzeń jednomodalnego systemu T w kratę $NExt(\Lambda_1 \otimes S5)$ normalnych rozszerzeń dwumodalnego systemu $\Lambda_1 \otimes S5$. Zanurzenie to odzwierciedla rozstrzygalność, adekwatność, zwartość oraz własność modelu skończonego. Oznacza to, że jeśli obraz pewnego systemu z kraty $NExt(T)$ posiada którąś z tych własności, to również posiada ją rozpatrywany system. W poniższym przykładzie podana została aksjomatyka systemu Λ_1 , dla którego stosujemy oznaczenie $Grz.3B_2$.

System $(S5 \otimes Grz.3B_2)$.

Przypomnijmy, że system $S5$ jest charakteryzowany przez rodzinę \mathcal{C}_1 skończonych klastrow. Możemy założyć, że klaster jednoelementowy nie należy do tej rodziny. Jego usunięcie nie zmienia charakteryzowanego systemu, a w znacznej mierze ułatwia opis wymaganego p -morfizmu. Klasę \mathcal{C}_1 można zastąpić jednym przeliczalnym nieskończonym klastrem

$$\mathfrak{F}^1 = \langle \{a_1, a_2, \dots\}, \{a_1, a_2, \dots\} \times \{a_1, a_2, \dots\} \rangle,$$

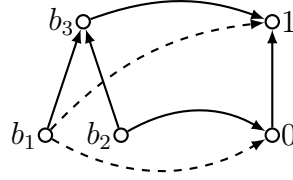
w którym a_1 jest punktem \mathcal{C}_1 -startowym.

Z kolei system jednomodalny $Grz.3B_2$ jest najmniejszym systemem zawierającym aksjomaty $K, \cdot 3, Grz$ oraz B_2 i jest domknięty na regułę odrywania MP oraz regułę konieczności (generalizacji) RN . System ten jest charakteryzowany przez jednoelementową rodzinę $\mathcal{C}_2 = \{\circ \rightarrow \circ\}$, gdzie $\circ \rightarrow \circ = \langle \{0, 1\}, \{(0, 0), (1, 1), (0, 1)\} \rangle$. To znaczy $Grz.3B_2 = \text{Log}\{\circ \rightarrow \circ\}$. Struktura $\circ \rightarrow \circ$ nie posiada punktu \mathcal{C}_2 -startowego. Przykładem $Grz.3B_2$ -struktury Kripkego z punktem \mathcal{C}_2 -startowym jest

$$\mathfrak{F}^2 = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} = \langle \{b_1, b_2, b_3\}, \{(b_1, b_1), (b_2, b_2), (b_3, b_3), (b_1, b_3), (b_2, b_3)\} \rangle.$$

Aby wykazać, że $\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array}$ jest $Grz.3B_2$ -strukturą założymy, że $\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array} \not\models \varphi$ dla pewnej formuły φ . Niech v będzie wartościowaniem, które falsyfikuje formułę φ w pewnym świecie $x \in \{b_1, b_2, b_3\}$, to znaczy $(\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array}, v, x) \not\models \varphi$. Wówczas $(\circ \rightarrow \circ, v', x') \not\models \varphi$, gdzie $1 \in v'(p) \Leftrightarrow b_3 \in v(p)$ oraz $0 \in v'(p) \Leftrightarrow x \in v(p)$ dla $x \in \{b_1, b_2\}$.

Rolę punktu \mathcal{C}_2 -startowego może pełnić zarówno świat b_1 , jak i b_2 . Niech b_1 będzie punktem \mathcal{C}_2 -startowym. Niezależnie od wartości $h(b_1)$ rozszerzeniem p -morficznym jest odwzorowanie $h(b_2) = 0$ oraz $h(b_3) = 1$.



Niech \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 będą domknięciami rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 , odpowiednio, na skończone sumy rozłączne i izomorficzne kopie. Zgodnie z Lematem 3.1, $\text{Log}\{\mathcal{C}'_1\} = \text{Log}\{\mathcal{C}_1\}$ oraz $\text{Log}\{\mathcal{C}'_2\} = \text{Log}\{\mathcal{C}_2\}$. Z Twierdzenia 2.1 wynika, iż system $S5 \otimes Grz.3B_2$ jest charakteryzowany przez klasę $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ skończonych struktur $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których każda S_1 -spójna składowa jest izomorficzna z pewnym klastrem skończonym, a każda S_2 -spójna składowa jest izomorficzna z $\circ \rightarrow \circ$. Lemat 3.3 pozwala na rozważanie podrodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ rodziny $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$, w której skład wchodzi tylko struktury spójne. Wówczas:

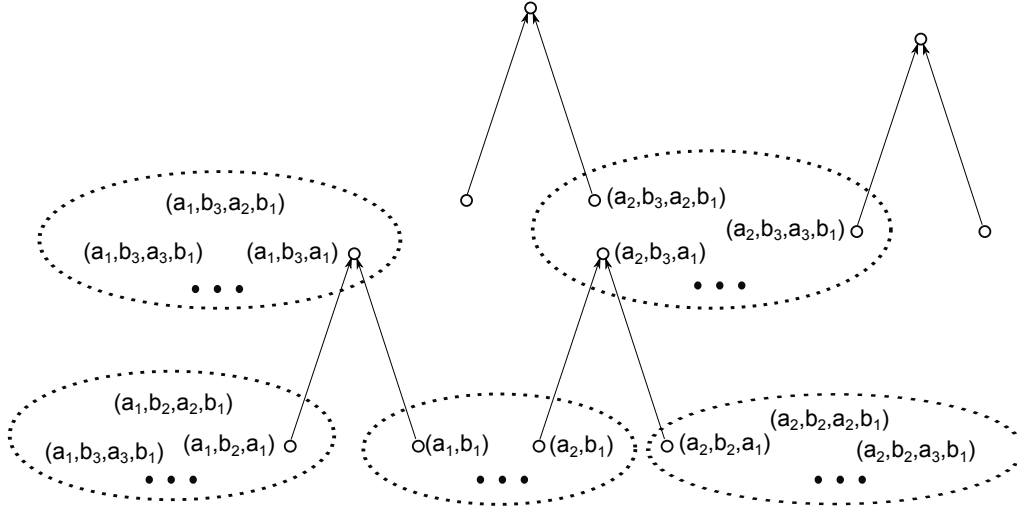
$$S5 \otimes Grz.3B_2 = \text{Log}\{\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2\} = \text{Log}\{CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)\}. \quad (3.8)$$

Rozważmy przeliczalną strukturę $\mathfrak{F}_W = \langle W, R, B \rangle$ zbudowaną przy pomocy elementów struktur \mathfrak{F}^1 oraz \mathfrak{F}^2 naprzemiennie. Dokładniej,

$W = \{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, c'_{i_{n-1}}, c_1) : n \in \{2, 3, \dots\}, c', c \in \{a, b\} \text{ oraz } c' \neq c,$
 $a_{i_1} \in \{a_1, a_2, \dots\}, a_{i_k} \in \{a_2, a_3, \dots\}, b_{i_k} \in \{b_2, b_3\} \text{ dla } k \in \{2, 3, \dots, n-1\}\},$
 a R oraz B są relacjami binarnymi na U i działają następująco:

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-1}} = b_{j_{n-1}}$
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-2}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-1}} = a_{j_{n-1}}$
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz
 $(b_{i_{n-1}}, b_{j_{n-1}}) \in \{(b_2, b_2), (b_3, b_3), (b_2, b_3)\}$

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{j_{n-1}} = b_3$

Rysunek 3.13: \mathfrak{F}_W

Struktura \mathfrak{F}_W jest spójna. Ponadto, każda jej R -spójna składowa jest izomorficzna z klastrem \mathfrak{F}^1 . Jedną z takich składowych jest $\langle W^{a_1}, R|_{W^{a_1}} \rangle$, gdzie $W_{a_1} = \{(a_i, b_1) : i \in \mathbb{N}\}$, natomiast relacja $R|_{W^{a_1}}$ jest relacją pełną, to znaczy $(a_i, b_1)R(a_j, b_1)$ dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$. Izomorfizm przekształcający tę składową na \mathfrak{F}^1 jest określony jako $(a_i, b_1) \mapsto a_i$. Świat (a_1, b_1) pełni rolę punktu \mathcal{C}_1 -startowego. Pozostałe R -spójne składowe są strukturami Kripkego

$$\langle W^{a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1}, R|_{W^{a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1}} \rangle$$

dla pewnych $a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1$, gdzie zbiór $W^{a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1}$ zawiera świat $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)$, pełniący rolę punktu \mathcal{C}_1 -startowego, oraz wszystkie ciągi postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)$. Relacja $R|_{W^{a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1}}$ jest relacją pełną. Izomorfizm na \mathfrak{F}^1 działa następująco:

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1) \mapsto a_1,$$


$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1) \mapsto a_{i_{n-1}}.$$

Następnie, każda B -spójna składowa jest strukturą Kripkego z uniwersum

$$\{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1), (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_2, a_1), (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_3, a_1)\}$$

dla pewnych $a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}$ oraz relacją będącą zawężeniem relacji B . W tym przypadku izomorfizm na \mathfrak{F}^2 określamy jak poniżej:

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1) &\mapsto b_1, \\ (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_2, a_1) &\rightarrow b_2, \\ (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_3, a_1) &\rightarrow b_3. \end{aligned}$$

Z faktu, że każda spójna składowa struktury $\langle W, R \rangle$ jest izomorficzna z klastrem \mathfrak{F}^1 oraz każda spójna składowa struktury $\langle W, B \rangle$ jest izomorficzna z , wnioskujemy, iż \mathfrak{F}_W jest $S5 \otimes Grz.3B_2$ -strukturą. To znaczy, prawdziwa jest implikacja:

$$S5 \otimes Grz.3B_2 \vdash \varphi \implies \mathfrak{F}_W \Vdash \varphi. \quad (3.9)$$

Dowód implikacji przeciwnej wymaga wskazania p -morfizmu przekształcającego strukturę \mathfrak{F}_W na dowolny element rodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$. Niech $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ będzie pewnym elementem rodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$. To znaczy \mathfrak{B} jest skończoną strukturą spójną, w której każda spójna składowa struktury $\langle V, S_1 \rangle$ jest izomorficzna z pewnym klastrem skończonym o co najmniej dwóch elementach oraz każda spójna składowa struktury $\langle V, S_2 \rangle$ jest izomorficzna z $\circ \rightarrow \circ$.

Niech $(a_1, b_1)', (a_2, b_1)', \dots, (a_{n_0}, b_1)'$ będą oznaczeniami wszystkich elementów pewnego klastra (to znaczy S_1 -spójnej składowej) będącego częścią struktury $\langle V, S_1 \rangle$. Każdy z tych elementów należy do pewnej S_2 -spójnej składowej (składowej postaci $\circ \rightarrow \circ$). Elementy S_2 -spójnej składowej zawierającej $(a_{i_1}, b_1)'$ oznaczamy $(a_{i_1}, b_2, a_1)'$ oraz $(a_{i_1}, b_3, a_1)'$, gdzie $(a_{i_1}, b_2, a_1)' S_2 (a_{i_1}, b_3, a_1)'$. Jeden z tych opisów będzie kolejną nazwą dla $(a_{i_1}, b_1)'$. Postępujemy tak dla wszystkich $i_1 \in \{1, \dots, n_0\}$. W następnym kroku opisujemy elementy klastra (S_1 -spójnej składowej) zawierającego ciąg $(a_{i_1}, b_{i_2}, a_1)'$ dla $i_1 \in \{1, \dots, n_0\}$ oraz $j_2 \in \{2, 3\}$. Elementy różne od $(a_{i_1}, b_{i_2}, a_1)'$ oznaczmy $(a_{i_1}, b_{i_2}, a_2, b_1)', \dots, (a_{i_1}, b_{i_2}, a_{n_{i_1, i_2}}, b_1)'$, gdzie n_{i_1, i_2} jest liczbą wszystkich elementów tego klastra. Ogólnie, jeśli element $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)'$ jest opisany dla pewnej parzystej liczby naturalnej n , to elementy S_2 -spójnej składowej zawierającej ten element opisujemy $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_2, a_1)'$ oraz $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1)'$, gdzie

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_2, a_1)' S_2 (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1)'.$$

Natomiast, jeśli element $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)'$ jest opisany dla pewnej nieparzystej liczby naturalnej n , to pozostałe elementy S_1 -klastra zawierającego ten element opisujemy $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_{i_n}, b_1)'$ dla $i_n \in \{2, \dots, n_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}\}$,

gdzie $n_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ jest liczbą elementów rozważanego S_1 -klastra. Szukane odwzorowanie działa następująco:

$$\begin{aligned} f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)) &= (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)', \\ f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)) &= (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i'_{n-1}}, b_1)', \end{aligned}$$

gdzie $i'_k = \min\{i_k, n_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}\}$ dla $k = 1$, $n_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}} = n_0$. Oczywiście

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)' = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1))$$

oraz

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)' = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1))$$

dla wszystkich $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)', (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)' \in V$. Zatem odwzorowanie f jest surjekcją. Załóżmy, że dwa elementy zbioru V są ze sobą w relacji R . Rozpatrzmy następujące trzy przypadki.

- Przypadek I Załóżmy, że

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1).$$

Wówczas

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i'_{n-1}}, b_1)',$$

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j'_{n-1}}, b_1)'.$$

Zatem

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1))S_1f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1)).$$

- Przypadek II Zakładamy, że

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1).$$

Wtedy

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i'_{n-1}}, b_1)',$$

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)'.$$

Stąd

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1))S_1f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)).$$

- Przypadek III Załóżmy, że

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)R(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1).$$

Wówczas

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)',$$

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j'_{n-1}}, b_1)'.$$

A więc

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1))S_1f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{j_{n-1}}, b_1)).$$

Podobnie postępujemy dla relacji B .

- Przypadek I Na początek założmy, że

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)B(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{j_{n-1}}, a_1).$$

Wówczas $(b_{i_{n-1}}, b_{j_{n-1}}) \in \{(b_2, b_2), (b_3, b_3), (b_2, b_3)\}$. Ponadto,

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)',$$

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{j_{n-1}}, a_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{j_{n-1}}, a_1)'.$$

Zatem

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1))S_2f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{j_{n-1}}, a_1)).$$

- Przypadek II Następnie zakładamy, że

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)B(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_3, a_1).$$

Wtedy

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_1)',$$

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_3, a_1)) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_3, a_1)'.$$

A stąd wnioskujemy, że

$$f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1))S_2f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_3, a_1)).$$

Aby zweryfikować drugi warunek definicji p -morfizmu, założmy, że $f(x)S_1y$ dla pewnych $x \in W$ oraz $y \in V$. Możemy założyć, że $f(x) \neq y$.

- Przypadek I Załóżmy, że $x = (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)$ oraz $f(x) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)'$. Wówczas

$$y = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i'_n}, b_1)'$$

dla pewnego $i'_n \in \{2, 3, \dots, n_{i'_1, i_2, i'_3, \dots, i'_{n-2}, i_{n-1}}\}$. Wtedy

$$y = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i'_n}, b_1))$$

oraz

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)R(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a'_{i_n}, b_1).$$

- Przypadek II Niech $x = (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i_n}, b_1)$ oraz $f(x) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i'_n}, b_1)'$. Wtedy

$$y = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i''_n}, b_1)'$$

dla pewnego $i''_n \in \{2, 3, \dots, n_{i'_1, i_2, i'_3, \dots, i'_{n-2}, i_{n-1}}\}$. Stąd

$$y = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i''_n}, b_1))$$

oraz

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i_n}, b_1)R(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a''_{i_n}, b_1).$$

Możliwa jest również sytuacja, gdy

$$y = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)'.$$

Wówczas

$$y = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1))$$

oraz

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_{i_n}, b_1)R(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1).$$

Następnie rozważmy analogiczny warunek dla relacji S_2 , to znaczy $f(x)S_2y$ dla pewnych $x \in W$ oraz $y \in V$, dla których $f(x) \neq y$.

- Przypadek I Załóżmy, że $x = (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)$ oraz $f(x) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a'_{i_{n-1}}, b_1)'$. Wówczas

$$y = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i'_{n-1}}, b_3, a_1)'.$$

Wtedy

$$y = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1))$$

oraz

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)B(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1).$$

- Przypadek II Zakładamy, że $x = (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_2, a_1)$ oraz $f(x) = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i'_{n-1}}, b_2, a_1)'$. Wtedy

$$y = (a_{i'_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i'_{n-1}}, b_3, a_1)'.$$

A stąd

$$y = f((a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1))$$

oraz

$$(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_2, a_1)B(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1).$$

Pokazaliśmy więc, że odwzorowanie f jest p -morfizmem. Zatem prawdziwa jest następująca implikacja:

$$\mathfrak{F}_W \Vdash \varphi \implies CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2) \Vdash \varphi, \quad (3.10)$$

która wraz z implikacją 3.9 oraz równością 3.8 dowodzi, iż struktura \mathfrak{F}_W charakteryzuje system $S5 \otimes Grz.3B_2$. \square

Przykład 3.7. Rozważmy formułę $\Diamond_2(\Box_2\Diamond_2p \rightarrow \Diamond_1\Box_1p) \vee \Box_1(\Box_2q \rightarrow \Box_1\Box_2q)$, gdzie relacja R odpowiada modalności \Box_1 , a relacja B odpowiada modalności \Box_2 . Aby udowodnić, że formuła ta nie jest tezą systemu $S5 \otimes Grz.3B_2$ znajdziemy skończoną $S5 \otimes Grz.3B_2$ -strukturę, która odrzuca formułę. Wartościowanie fałsyfikujące v dobierzemy tak, aby formułę sfalsyfikujemy w świecie (a_1, b_1) struktury \mathfrak{F}_W . Zajmijmy się najpierw pierwszym składnikiem alternatywy. Wymagamy, aby

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_1)) \not\models \Diamond_2(\Box_2\Diamond_2p \rightarrow \Diamond_1\Box_1p).$$

Zatem

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_1)) \not\models \Box_2\Diamond_2p \rightarrow \Diamond_1\Box_1p$$

oraz

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_3, a_1)) \not\models \Box_2\Diamond_2p \rightarrow \Diamond_1\Box_1p.$$

Powyższe warunki są spełnione, gdy

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_1)) \Vdash p, \quad (\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_3, a_1)) \Vdash p$$

oraz

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_2, b_1)) \not\models p, \quad (\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_3, a_2, b_1)) \not\models p.$$

Drugi składnik alternatywy również będzie sfalsyfikowany w punkcie (a_1, b_1) .

Chcemy, aby

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_1)) \not\models \Box_1(\Box_2q \rightarrow \Box_1\Box_2q).$$

Wówczas

$$\exists_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{F}_W, v, (a_i, b_1)) \not\models \Box_2 q \rightarrow \Box_1 \Box_2 q.$$

Warunek jest spełniony, gdy

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_1)) \models q, \quad (\mathfrak{F}_W, v, (a_1, b_3, a_1)) \models q$$

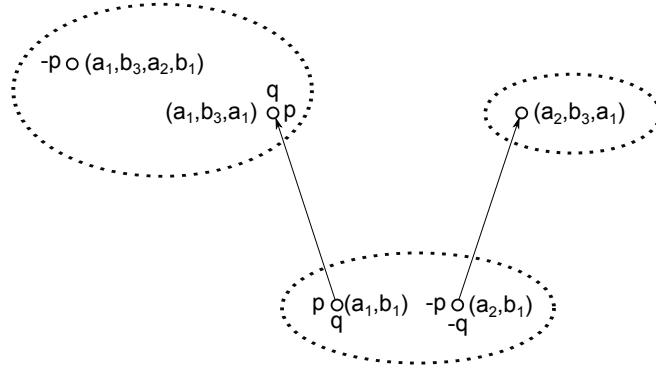
oraz

$$(\mathfrak{F}_W, v, (a_2, b_1)) \not\models q.$$

Skończoną $S5 \otimes Grz.3B_2$ -strukturą, która falsyfikuje rozważaną formułę jest $\mathfrak{F}'_W = \langle W', R', B' \rangle$, gdzie

$$W' = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_3, a_1), (a_2, b_3, a_1), (a_1, b_3, a_2, b_1)\},$$

a relacje R' oraz B' są restrykcjami R oraz B , odpowiednio, do zbioru W' . Szukanym modelem jest $\langle \mathfrak{F}'_W, v' = v|_{W'} \rangle$.



Rysunek 3.14: \mathfrak{F}'_W

Rozdział 4

Konstrukcja z \mathcal{C} -korzeniem

W rozdziale tym przedstawiona została kolejna metoda konstruowania przeliczalnej struktury Kripkego charakteryzującej fuzję systemów jednomodalnych. Jej szczegółowy opis został zawarty w dowodzie Twierdzenia 4.4. Metoda ta wykorzystuje pojęcie \mathcal{C} -korzenia. Najpierw wprowadzimy niezbędne definicje i opiszemy pewne modyfikacje rodzin struktur. Modyfikacje te mają na celu otrzymanie rodzin struktur ukorzenionych. Rozdział ten zawiera opis struktur charakteryzujących systemy $Grz.3 \otimes Grz.3$, $S4 \otimes S4$ oraz $S5 \otimes Grz.3B_2$ otrzymanych metodą \mathcal{C} -korzenia. W niektórych przypadkach otrzymane struktury są generowanymi podstrukturami struktur otrzymanych z zastosowaniem metody punktu \mathcal{C} -startowego.

4.1 Metoda tworzenia struktur Kripkego dla fuzji dwóch systemów jednomodalnych

Przypomnijmy, że struktura Kripkego $\mathfrak{B} = \langle U, S_1, \dots, S_n \rangle$ jest podstrukturą struktury $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$, jeżeli $U \subseteq W$ oraz S_i jest restrykcją R_i do U , to znaczy $S_i = R_i \cap (U \times U)$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Ponadto \mathfrak{B} nazwiemy generowaną podstrukturą struktury \mathfrak{F} , jeśli dla każdego $y \in W$, element $y \in U$, gdy xR_iy dla pewnego $x \in U$ oraz pewnego $i \in \{1, \dots, n\}$. Podstruktura struktury \mathfrak{F} generowana przez zbiór $V \subseteq W$ będzie oznaczona $[V]_{\mathfrak{F}}$. Rodzina wszystkich podstruktur generowanych przy pomocy elementów rodziny \mathcal{C} będzie oznaczana przez $GS(\mathcal{C})$. Rodzina podstruktur generowana zbiorami jednoelementowymi będzie oznaczana $PGS(\mathcal{C})$.

Lemat 4.1. *Niech $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ będzie n -strukturą oraz niech φ będzie \mathcal{ML}_n -formułą. Wówczas:*

$$(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \varphi \iff ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash \varphi.$$

Dowód. Dowód równoważności przebiega indukcyjnie ze względu na budowę formuły φ . Niech p będzie zmienną zdaniową. Wówczas:

$$(\mathfrak{F}, v, x) \Vdash p \iff x \in v(p) \iff x \in v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}(p) \iff ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash p.$$

Następnie założymy, że φ oraz ψ są \mathcal{ML}_n -formułami, dla których teza lematu jest spełniona. Takie założenie pozwoli zastosować krok indukcyjny. Zatem:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \neg\varphi &\iff (\mathfrak{F}, v, x) \nVdash \varphi \iff x \notin v(\varphi) \iff x \notin v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}(\varphi) \iff \\ &([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \nVdash \varphi \iff ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash \neg\varphi, \\ (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \wedge \varphi &\iff (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \psi \text{ oraz } (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \varphi \iff \\ &([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash \psi \text{ oraz } ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash \varphi \iff ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash \psi \wedge \varphi. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla każdego elementu $x \in W$ oraz relacji R_i zachodzi równość $\{y \in W : xR_i y\} = \{y \in [x]_{\mathfrak{F}} : xR_i y\}$. Stąd:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}, v, x) \Vdash \Box_i \varphi &\iff \forall_{y \in W} (xR_i y \implies (\mathfrak{F}, v, y) \Vdash \varphi) \iff \\ &\forall_{y \in [x]_{\mathfrak{F}}} (xR_i y \implies ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, y) \Vdash \varphi) \iff ([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \Vdash \Box_i \varphi. \end{aligned}$$

Prawdziwość tezy dla spójników \vee, \rightarrow oraz operatorów $\Diamond_1, \dots, \Diamond_n$ wynika z faktu, iż można je zdefiniować przy pomocy elementów zbioru $\{\wedge, \neg, \Box_1, \dots, \Box_n\}$. \square

Wniosek 4.2. Niech $\mathfrak{F} = \langle W, R_1, \dots, R_n \rangle$ będzie n -strukturą oraz niech φ będzie \mathcal{ML}_n -formułą. Wówczas:

$$[x]_{\mathfrak{F}} \nVdash \varphi \implies \mathfrak{F} \nVdash \varphi.$$

Powyższy lemat pozwala na pewne modyfikacje rodziny struktur \mathcal{C} z jednoczesnym zachowaniem charakteryzowanego systemu.

Lemat 4.3. Niech \mathcal{C} będzie rodziną n -struktur. Wówczas:

- (i) $\text{Log}\{\mathcal{C}\} = \text{Log}\{PGS(\mathcal{C})\}$.
- (ii) $\text{Log}\{\mathcal{C}\} = \text{Log}\{GS(\mathcal{C})\}$.

Dowód. Punkt (i) wynika bezpośrednio z Lematu 4.1. Założymy, że $\varphi \notin \text{Log}\{\mathcal{C}\}$. Wówczas $(\mathfrak{F}, v, x) \nVdash \varphi$ dla modelu bazującego na pewnym $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}$. Zgodnie z Lematem 4.1 mamy $([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \nVdash \varphi$ oraz $[x]_{\mathfrak{F}} \in PGS(\mathcal{C})$. Więc $\varphi \notin \text{Log}\{PGS(\mathcal{C})\}$.

Podobnie postępujemy, gdy $\varphi \notin \text{Log}\{PGS(\mathcal{C})\}$. Wówczas $([x]_{\mathfrak{F}}, v|_{[x]_{\mathfrak{F}}}, x) \not\models \varphi$ dla pewnego $[x]_{\mathfrak{F}} \in PGS(\mathcal{C})$. Ale \mathfrak{F} jest pewnym elementem z \mathcal{C} . Tym samym zgodnie z Lematem 4.1, struktura $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}$ odrzuca formułę φ . A więc $\varphi \notin \text{Log}\{\mathcal{C}\}$.

Aby wykazać własność (ii) zauważmy, że $PGS(\mathcal{C}) = PGS(GS(\mathcal{C}))$. Wówczas $\text{Log}\{\mathcal{C}\} = \text{Log}\{PGS(\mathcal{C})\} = \text{Log}\{PGS(GS(\mathcal{C}))\} = \text{Log}\{GS(\mathcal{C})\}$. □

Konstrukcja przedstawiona w tym rozdziale wymaga zapoznania się ze strukturami ukorzenionymi. Załóżmy, że $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ jest rodziną struktur z korzeniami, a x_i jest korzeniem struktury \mathfrak{F}_i , $i \in I$. Załóżmy ponadto, że korzeniem struktury \mathfrak{F} jest punkt x_0 . Powiemy, że x_0 jest \mathcal{C} -korzeniem, jeżeli dla każdego $i \in I$ istnieje taki p -morfizm $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_i$, że $f(x_0) = x_i$.

Zaprezentujemy teraz główny wynik tego rozdziału, który dotyczy konstruowania przeliczalnych struktur Kripkego adekwatnych dla fuzji systemów jednomodalnych. Konstrukcja opisana w dowodzie poniższego twierdzenia wykorzystuje pojęcie \mathcal{C} -korzenia.

Twierdzenie 4.4. *Niech \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 będą rodzinami struktur ukorzenionych, które charakteryzują systemy jednomodalne L_1 oraz L_2 , odpowiednio. Niech ponadto \mathfrak{F}^1 będzie przeliczalną L_1 -strukturą z $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzeniem oraz \mathfrak{F}^2 będzie przeliczalną L_2 -strukturą z $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzeniem. Wówczas istnieje przeliczalna struktura ukorzeniona $\mathfrak{F} = \langle W, R, B \rangle$ charakteryzująca system $L_1 \otimes L_2$. Co więcej, spójne składowe struktur $\langle W, R \rangle$ oraz $\langle W, B \rangle$ są izomorficzne z \mathfrak{F}^1 oraz \mathfrak{F}^2 , odpowiednio.*

Dowód. Dowód przebiega podobnie jak w przypadku Twierdzenia 3.5, jednak odpowiednie rodziny struktur są modyfikowane w inny sposób. Celem tych modyfikacji jest otrzymanie rodziny struktur ukorzenionych.

Należy zauważyć, że $\mathcal{C}_1 \subseteq PGS(\mathcal{C}_1)$ oraz $\mathcal{C}_2 \subseteq PGS(\mathcal{C}_2)$. Wynika to z faktu, iż elementy rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 posiadają korzenie. Zatem każda struktura z rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 jest generowana przez swój korzeń.

Niech \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 będą domknięciami rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 na rozłączne sumy i izomorficzne kopie. Z Lematu 3.1 wynika, iż $L_1 = \text{Log}\{\mathcal{C}_1\} = \text{Log}\{\mathcal{C}'_1\}$ oraz $L_2 = \text{Log}\{\mathcal{C}_2\} = \text{Log}\{\mathcal{C}'_2\}$. Zgodnie z Twierdzeniem 2.1, $L_1 \otimes L_2 = \text{Log}\{\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2\}$. Elementami klasy $\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2$ są struktury postaci $\mathfrak{A} = \langle U, H_1, H_2 \rangle$, których H_1 -spójne składowe są izomorficzne z elementami klasy \mathcal{C}_1 , a H_2 -spójne składowe są izomorficzne z elementami klasy \mathcal{C}_2 . W odniesieniu do punktu (i) Lematu 4.3, możemy tę rodzinę zastąpić przez $PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Jest to rodzina wszystkich ukorzenionych struktur Kripkego postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, których S_1 -spójne składowe są izomorficzne z elementami klasy

$GS(\mathcal{C}_1)$, a S_2 -spójne składowe są izomorficzne z elementami klasy $GS(\mathcal{C}_2)$.
Otrzymujemy więc następującą równoważność:

$$L_1 \otimes L_2 \vdash \varphi \iff PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (4.1)$$

Opis szukanej struktury jest podobny do opisu struktury konstruowanej przy pomocy punktu \mathcal{C} -startowego. Niech $\mathfrak{F}^1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ oraz $\mathfrak{F}^2 = \langle W_2, R_2 \rangle$, gdzie $W_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$ oraz $W_2 = \{b_1, b_2, \dots\}$. Załóżmy, że punkt a_1 jest $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzeniem struktury \mathfrak{F}^1 , a b_1 jest $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzeniem struktury \mathfrak{F}^2 . Zbiór światów struktury \mathfrak{F} jest zbiorem ciągów złożonych naprzemiennie z elementów zbiorów W_1 oraz W_2 . Dokładniej,

$$W = \{(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, c'_{i_{n-1}}, c_1) : n \in \{2, \dots\}, c', c \in \{a, b\} \\ \text{oraz } c' \neq c, i_1 \in \mathbb{N}, i_2, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

Relacje R oraz B działają w następujący sposób:

- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-1}} = b_{j_{n-1}}$ oraz $a_1 R_1 a_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_{i_{n-1}} R_1 a_{j_{n-1}}$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-2}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_{i_{n-1}} R_1 a_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)R(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, b_{i_{n-2}} = b_{j_{n-2}}$ oraz $a_1 R_1 a_{j_{n-1}}$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-1}} = a_{j_{n-1}}$ oraz $b_1 R_2 b_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{i_{n-1}} R_2 b_{j_{n-1}}$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, a_{j_{n-2}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_{i_{n-1}} R_2 b_1$.
- $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)B(a_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_{n-1}}, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}$, $b_{i_2} = b_{j_2}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$ oraz $b_1 R_2 b_{j_{n-1}}$.

Dowód, iż każda R -spójna składowa jest izomorficzna z \mathfrak{F}^1 oraz każda B -spójna składowa jest izomorficzna z \mathfrak{F}^2 przebiega analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.5. Przypomnijmy zarys tego dowodu. W skład jednej z R -spójnych składowych wchodzi wszystkie ciągi długości 2. Wówczas $(a_i, b_1)R(a_j, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy a_iRa_j dla $i, j \in \mathbb{N}$. Izomorfizmem pomiędzy rozważaną R -spójną składową i strukturą \mathfrak{F}^1 jest, analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 3.5, odwzorowanie $(a_i, b_1) \mapsto a_i$ dla $i \in \mathbb{N}$. W tym przypadku (a_i, b_1) pełni rolę $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzenia dla rozpatrywanej R -spójnej składowej. Każda inna R -spójna składowa zawiera jeden ciąg postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1)$ (nieparzystej długości), który pełni rolę $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzenia, i wszystkie ciągi postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_{i_{n-1}}, b_1)$. Wymaganym izomorfizmem jest:

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-2}}, a_1) &\mapsto a_1, \\ (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1) &\mapsto a_{i_{n-1}}. \end{aligned}$$

Aby pokazać, że każda B -spójna składowa struktury \mathfrak{F} jest izomorficzna z \mathfrak{F}^2 należy postępować analogicznie. Przy czym każda B -spójna składowa zawiera jeden ciąg postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)$ (parzystej długości) i wszystkie ciągi postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_{i_{n-1}}, a_1)$. Ciągi postaci $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)$ pełnią rolę $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzenia. Wymagany izomorfizm działa następująco:

$$\begin{aligned} (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1) &\mapsto b_1, \\ (a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_{n-1}}, a_1) &\mapsto b_{i_{n-1}}. \end{aligned}$$

Element (a_1, b_1) jest korzeniem struktury \mathfrak{F} . Aby to wykazać, rozważmy pewien element uniwersum W . Bez straty ogólności możemy założyć, że element ten jest ciągiem parzystej długości. Zatem niech naszym elementem będzie ciąg $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)$. R -spójna składowa zawierająca element (a_1, b_1) jest izomorficzna z strukturą ukorzenioną \mathfrak{F}^1 , zatem istnieje ścieżka względem relacji R z świata (a_1, b_1) do świata (a_{i_1}, b_1) . Następnie B -spójna składowa zawierająca świat (a_{i_1}, b_1) jest izomorficzna z strukturą ukorzenioną \mathfrak{F}^2 , a element (a_{i_1}, b_1) pełni rolę korzenia. Więc istnieje ścieżka względem relacji B pomiędzy punktem (a_{i_1}, b_1) oraz (a_{i_1}, b_{i_2}, a_1) . Przechodząc tak pomiędzy kolejnymi spójnymi składowymi osiągniemy pożądaną element.

Z faktu, iż każda spójna składowa struktury $\langle W, R \rangle$ jest izomorficzna z \mathfrak{F}^1 oraz każda spójna składowa struktury $\langle W, B \rangle$ jest izomorficzna z \mathfrak{F}^2 wnioskujemy, że \mathfrak{F} jest $L_1 \otimes L_2$ -strukturą. Innymi słowy, prawdziwa jest implikacja:

$$L_1 \otimes L_2 \vdash \varphi \implies \mathfrak{F} \Vdash \varphi. \quad (4.2)$$

Aby wykazać prawdziwość implikacji przeciwnej rozważmy strukturę $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ będącą elementem rodziny $PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. \mathfrak{B} jest strukturą ukorzenioną, w której każda spójna składowa $\langle V, S_1 \rangle$ jest izomorficzna z pewnym

elementem rodziny $GS(\mathcal{C}_1)$ oraz każda spójna składowa $\langle V, S_2 \rangle$ jest izomorficzna z pewnym elementem rodziny $GS(\mathcal{C}_2)$. Struktura \mathfrak{B} posiada korzeń i element ten będzie obrazem ciągu (a_1, b_1) poprzez odwzorowanie f . Odwzorowanie to będzie rozszerzane na kolejne spójne składowe.

R -spójną składową struktury \mathfrak{F} zawierającą punkt (a_1, b_1) (zbiór wszystkich elementów postaci (a_i, b_1) dla $i \in \mathbb{N}$) można p -morficznie odwzorować na strukturę $[f((a_1, b_1))]_{\langle V, S_1 \rangle}$. Są to wszystkie elementy osiągalne z $f((a_1, b_1))$ przy pomocy relacji S_1 . Wynika to z założenia, iż \mathfrak{F}^1 jest strukturą z $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzeniem.

W następnym kroku skupmy się na S_2 -spójnych składowych struktury \mathfrak{B} , które zawierają punkty postaci $f((a_i, b_1))$ dla $i \in \mathbb{N}$. Dla ustalonego $i_0 \in \mathbb{N}$, B -spójna składowa struktury \mathfrak{F} zawierająca punkt (a_{i_0}, b_1) (zbiór, w którego skład wchodzi (a_{i_0}, b_1) oraz wszystkich elementów postaci (a_{i_0}, b_j, a_1) dla $j \in \{2, 3, \dots\}$) jest izomorficzna ze strukturą \mathfrak{F}^2 , więc może zostać p -morficznie odwzorowana na strukturę $[f((a_{i_0}, b_1))]_{\langle V, S_2 \rangle}$.

W ten sposób odwzorowanie f zostaje rozszerzone na kolejne spójne składowe struktury \mathfrak{F} . Jeśli odwzorowanie jest określone dla elementu postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, b_{i_{n-10}}, a_1)$ (tym samym dla wszystkich krótszych ciągów), to może zostać rozszerzone na R -spójną składową struktury \mathfrak{F} zawierającą ten punkt (są to punkty postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, b_{i_{n-10}}, a_1)$ oraz $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, b_{i_{n-10}}, a_{i_n}, b_1)$ dla $i_n \in \{2, 3, \dots\}$). Składowa ta zostanie odwzorowana p -morficznie na strukturę $[f((a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, b_{i_{n-10}}, a_1))]_{\langle V, S_1 \rangle}$. Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy częściowy p -morfizm jest określony dla elementu postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, a_{i_{n-10}}, b_1)$. Odwzorowanie może zostać rozszerzone na B -spójną składową struktury \mathfrak{F} zawierającą ten punkt (są to punkty postaci $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, a_{i_{n-10}}, b_1)$ oraz $(a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, a_{i_{n-10}}, b_{i_n}, a_1)$, dla $i_n \in \{2, 3, \dots\}$). Składowa ta zostanie odwzorowana p -morficznie na strukturę $[f((a_{i_{10}}, b_{i_{20}}, \dots, a_{i_{n-10}}, b_1))]_{\langle V, S_2 \rangle}$. Odwzorowanie jest rozszerzane na kolejne R i B -spójne składowe z zachowaniem warunków p -morfizmu.

Ponieważ struktura \mathfrak{B} posiada korzeń, więc każdy jej świat jest osiągalny w skończonej liczbie przejść. Tym samym ostatecznie otrzymane odwzorowanie f jest p -morfizmem, który przekształca strukturę \mathfrak{F} na strukturę \mathfrak{B} . Oznacza to prawdziwość poniższej implikacji:

$$\mathfrak{F} \Vdash \varphi \implies PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (4.3)$$

Implikacje 4.2, 4.3 oraz równoważność 4.1 wykazują poprawność twierdzenia. \square

Metoda \mathcal{C} -korzenia może generować takie same struktury, jak metoda punktu \mathcal{C} -startowego. Dzieje się tak w przypadku, gdy struktura z punktem

\mathcal{C}_1 -startowym jest jednocześnie strukturą z $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzeniem oraz strukturą z punktem \mathcal{C}_2 -startowym jest strukturą z $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzeniem. Obydwie metody generują światy pożądanej struktury w podobny sposób. Również opis relacji jest taki sam. Zatem używając tych samych struktur, otrzymamy identyczny wynik. Przykładem rodziny o tej własności jest rodzina \mathcal{C} , której składowymi są klastry. Wówczas strukturą z punktem \mathcal{C} -startowym jest największy klaster (zawierający najwięcej elementów) tej rodziny lub klaster nieskończony. Ten sam klaster jest strukturą z \mathcal{C} -korzeniem. Zatem struktury charakteryzujące systemy $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ oraz $S5 \otimes S5$ otrzymane metodą \mathcal{C} -korzenia będą takie same, jak struktury otrzymane przy pomocy metody z punktem \mathcal{C} -startowym.

4.2 Zastosowania konstrukcji z \mathcal{C} -korzeniem

Paragraf ten zawiera przykłady struktur otrzymanych metodą \mathcal{C} -korzenia. Struktury przedstawione poniżej charakteryzują systemy $\text{Grz.3} \otimes \text{Grz.3}$, $S4 \otimes S4$ oraz $S5 \otimes \text{Grz.3}B_2$.

System $(\text{Grz.3} \otimes \text{Grz.3})$.

Przypomnijmy, że $\text{Grz.3} = \text{Log}\{\mathcal{C}\}$, gdzie $\mathcal{C} = \{\langle\{1, \dots, n\}, \geqslant\rangle : n \in \mathbb{N}\}$. Rodzina ta jest domknięta na podstruktury generowane przez pojedyncze punkty. To znaczy $\mathcal{C} = PGS(\mathcal{C})$.

Jako Grz.3 -strukturę z \mathcal{C} -korzeniem rozważmy $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^2 = \langle W_1, \leqslant \rangle$, gdzie $W_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. \mathcal{C} -korzeniem jest punkt 0. Prawdziwość aksjomatów systemu Grz.3 w strukturze \mathfrak{F}^1 uzasadniamy korzystając z tabeli zamieszczonej w podrozdziale 1.3. Jak łatwo zauważyć, struktura \mathfrak{F}^1 jest zwrotna ($\mathfrak{F}^1 \models T$), przechodnia ($\mathfrak{F}^1 \models 4$) oraz nie istnieje nieskończony ciąg x_1, x_2, \dots , w którym $x_j R x_{j+1}$ oraz $x_j \neq x_{j+1}$ dla $j \in \mathbb{N}$. Stąd, $\mathfrak{F}^1 \models \text{Grz}$. Zbiór W_1 jest liniowo uporządkowany, więc $\mathfrak{F}^1 \models \cdot 3$. Oznacza to, że struktura \mathfrak{F}^1 jest Grz.3 -strukturą.

W poprzednim rozdziale wykazano, iż $\text{Grz.3} \otimes \text{Grz.3} = \text{Log}\{\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'\}$, gdzie $\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$ jest rodziną skończonych struktur $\mathfrak{A} = \langle U, H_1, H_2 \rangle$, w których H_1 -spójne oraz H_2 -spójne składowe są skończonymi łańcuchami. Zgodnie z punktem (i) Lematu 4.3 mamy $\text{Grz.3} \otimes \text{Grz.3} = \text{Log}\{PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')\}$, gdzie $PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$ jest rodziną skończonych struktur ukorzenionych postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, w których S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są skończonymi łańcuchami.

Niech $\mathfrak{F}_{3r} = \langle W, R, B \rangle$ będzie strukturą, w której

$$W = \{(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) : n \geq 2, p_1 \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, p_k \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

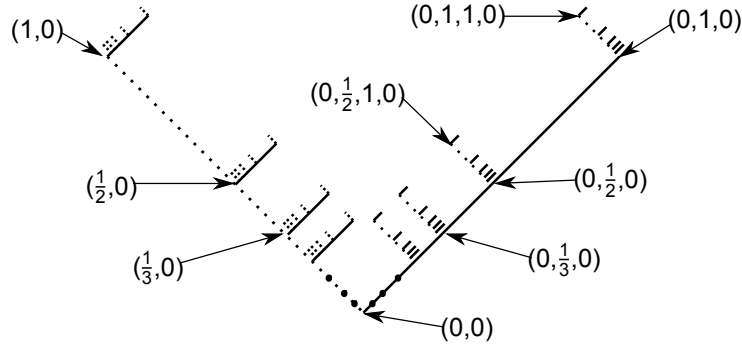
Relacje R oraz B są relacjami binarnymi na W (Rysunek 4.1):

$(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)R(q_1, \dots, q_{m-1}, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $n = m$ są parzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-2} = q_{n-2}$ oraz $p_{n-1} \leq q_{n-1}$ lub
- $n = m$ są nieparzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-1} = q_{n-1}$ lub
- $n = m - 1$ oraz m jest parzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leq m - 2$, $0 < q_{m-1}$.

$(p_1, \dots, p_{n-1}, 0)B(q_1, \dots, q_{m-1}, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $n = m$ są parzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-1} = q_{n-1}$ lub
- $n = m$ są nieparzyste oraz $p_1 = q_1, \dots, p_{n-2} = q_{n-2}$ oraz $p_{n-1} \leq q_{n-1}$ lub
- $n = m - 1$ oraz m jest nieparzyste, $p_s = q_s$ dla $s \leq m - 2$, $0 < q_{m-1}$.



Rysunek 4.1: \mathfrak{F}_{3r}

Każda R oraz B -spójna składowa struktury \mathfrak{F}_{3r} jest izomorficzna ze strukturą \mathfrak{F}^1 , więc $\mathfrak{F}_{3r} \models T^i, 4^i, Grz^i$ oraz $\mathfrak{F}_{3r} \models \cdot 3^i$ dla $i = 1, 2$. Oznacza to, że prawdziwa jest implikacja:

$$Grz.3 \otimes Grz.3 \vdash \varphi \implies \mathfrak{F}_{3r} \models \varphi. \quad (4.4)$$

Aby wykazać implikację przeciwną, należy udowodnić, że strukturę \mathfrak{F}_{3r} można p -morficznie odwzorować na dowolny element rodziny $PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$. Niech $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ będzie skończoną strukturą z korzeniem x_0 , której S_1 -spójne oraz S_2 -spójne składowe są skończonymi łańcuchami. Niech z będzie takim elementem uniwersum V , że $x_0 S_1 z$ oraz nie istnieje $t \in V \setminus \{z\}$, dla którego $z S_1 t$. Element ten nazwiemy x_1 . Oznaczeniem x_n będzie nazwany element zbioru $V \setminus \{x_{n-1}\}$, który jest bezpośrednio przed x_{n-1} (względem relacji S_1) oraz spełnia warunek $x_0 S_1 x_n$ (może to być x_0). Podobny opis stosujemy dla relacji S_2 . Numeracja w indeksie różni się dopisaniem zera na początku. Mianowicie, niech z będzie takim elementem zbioru V , że $x_0 S_2 z$ oraz nie istnieje $t \in V \setminus \{z\}$, dla którego $z S_2 t$. Element ten nazwiemy $x_{0,1}$. Oznaczeniem $x_{0,n}$ będzie nazwany element zbioru $V \setminus \{x_{0,n-1}\}$, który jest bezpośrednio przed $x_{0,n-1}$ (względem relacji S_2) oraz spełnia warunek $x_0 S_2 x_{0,n}$ (może to być x_0).

Przypuśćmy, że nazwaliśmy element x_{n_1, \dots, n_k} (n_1 może być równe 0) oraz k jest nieparzyste. Wówczas elementy będące w relacji S_1 z x_{n_1, \dots, n_k} można traktować jako opisane. Niech z będzie takim elementem zbioru V , że $x_{n_1, \dots, n_k} S_2 z$ oraz nie istnieje $t \in V \setminus \{z\}$, dla którego $z S_2 t$. Element ten nazwiemy $x_{n_1, \dots, n_k, 1}$. Oznaczeniem $x_{n_1, \dots, n_k, n}$ będzie nazwany element zbioru $V \setminus \{x_{n_1, \dots, n_k, n-1}\}$, który jest bezpośrednio przed $x_{n_1, \dots, n_k, n-1}$ (względem relacji S_2) oraz spełnia warunek $x_{n_1, \dots, n_k} S_2 x_{n_1, \dots, n_k, n}$ (może to być x_{n_1, \dots, n_k}). Analogiczny opis stosujemy dla k parzystego i relacji S_1 .

W następnym kroku dla każdego elementu uniwersum V definiujemy zbiory następników względem relacji S_1 oraz S_2 :

- dla k parzystych lub $x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} = x_0$

$$S_{1x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^+ = \{z \in V : x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} S_1 z\},$$

- dla k nieparzystych

$$S_{2x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^+ = \{z \in V : x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k} S_2 z\}.$$

Przez $m_{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^{S_1+}$ oraz $m_{x_{\pm n_1, \dots, \pm n_k}}^{S_2+}$ oznaczamy liczbę elementów powyższych zbiorów, odpowiednio.

Zdefiniujmy teraz odwzorowanie $f: W \rightarrow V$ wzorem

$$f((p_1, \dots, p_k, 0)) = x_{o_1, \dots, o_k},$$

gdzie

- (a) $o_1 = 0$, jeśli $p_1 = 0$,
- (b) $o_i = \min\{n_i, m_{x_{o_1, \dots, o_{i-1}}}^{C+}\}$, jeśli $p_i = \frac{1}{n_i}$,

gdzie $C = S_1$ dla i nieparzystych oraz $C = S_2$ dla i parzystych. Ponadto, dla $i = 1$ oraz $p_1 \neq 0$ mamy $x_{o_1, \dots, o_{i-1}} = x_0$. Dowód, że odwzorowanie f jest p -morfizmem przebiega analogicznie jak w przykładzie dotyczącym systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$ z poprzedniego rozdziału. Fakt, iż f jest p -morfizmem pociąga za sobą prawdziwość poniższej implikacji:

$$\mathfrak{F}_{3r} \Vdash \varphi \implies CS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}') \Vdash \varphi. \quad (4.5)$$

Z implikacji (4.4) oraz (4.5) i faktu, że rodzina $PGS(\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}')$ charakteryzuje system $Grz.3 \otimes Grz.3$ wynika równoważność:

$$Grz.3 \otimes Grz.3 \vdash \varphi \iff \mathfrak{F}_{3r} \Vdash \varphi.$$

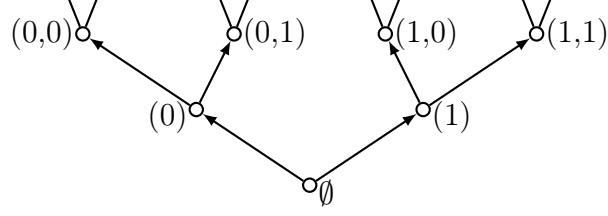
Struktura \mathfrak{F}_{3r} jest podstrukturą struktury \mathfrak{F}_3 otrzymanej metodą punktu \mathcal{C} -startowego. Dokładniej, $\mathfrak{F}_{3r} = [(0, 0)]_{\mathfrak{F}_3}$. \square

Metodą \mathcal{C} -korzenia można otrzymać strukturę $T_{2,2}$ opisaną w artykule [1]. Charakteryzuje ona system dwumodalny $S4 \otimes S4$ i jest skonstruowana przy pomocy nieskończonego drzewa binarnego T_2 . W poniższym przykładzie została wykorzystana symbolika wprowadzona przez autorów artykułu [1].

System $(S4 \otimes S4)$.

System dwumodalny $S4 \otimes S4$ jest aksjomatyzowany przez K^i , T^i oraz 4^i i jest domknięty na regułę odrywania MP oraz reguły konieczności (generalizacji) RN_i , dla $i = 1, 2$.

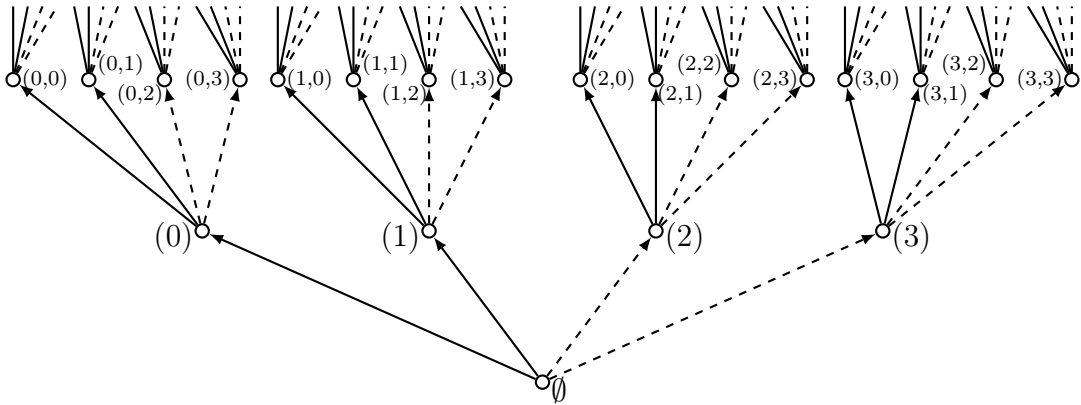
Jego jednomodalny odpowiednik $S4$ jest charakteryzowany przez nieskończone drzewo binarne z relacją zwrotną i przechodnią. Drzewo to można opisać jako strukturę Kripkego $T_2 = \langle \{0, 1\}^*, R \rangle$, gdzie $\{0, 1\}^*$ jest zbiorem wszystkich skończonych ciągów o wyrazach 0 i 1 (wraz z ciągiem pustym) oraz sRt wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists_u s \cdot u = t$. Innymi słowy, ciąg t jest przedłużeniem ciągu s .

Rysunek 4.2: T_2

Niech $T'_2 = \langle \{2, 3\}^*, R' \rangle$ będzie strukturą, w której relacja R' jest opisana w taki sam sposób jak relacja R w strukturze T_2 . Łatwo zauważyć, że struktura T'_2 jest izomorficzną kopią struktury T_2 . Przyjmijmy $\mathcal{C}_1 = \{T_2\}$ oraz $\mathcal{C}_2 = \{T'_2\}$. Ponadto, niech \mathcal{C}'_1 oraz \mathcal{C}'_2 będą domknięciami rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 , odpowiednio, na izomorficzne kopie i sumy rozłączne. Należy zauważyć, że dowolna podstruktura struktury T_2 generowana przez pojedynczy punkt jest izomorficzna z T_2 . Zatem $PGS(\mathcal{C}_1) = \{\mathcal{C}_1\}$. Rolę $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzenia pełni ciąg pusty \emptyset . Analogicznie dla klasy \mathcal{C}_2 . Zgodnie z Twierdzeniem 2.1 oraz Lematem 4.3, system $S4 \otimes S4$ jest charakteryzowany przez rodzinę $PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ ukorzenionych struktur postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, których S_1 oraz S_2 -spójne składowe są izomorficzne z T_2 . Fakt ten oznacza prawdziwość równoważności:

$$S4 \otimes S4 \vdash \varphi \iff PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2) \models \varphi. \quad (4.6)$$

Przy pomocy struktur T_2 oraz T'_2 tworzymy pożądaną strukturę $T_{2,2}$, która charakteryzować będzie system $S4 \otimes S4$. Niech $T_{2,2} = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ będzie strukturą, w której $W = \{0, 1, 2, 3\}^*$, sR_1t wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists_{u \in \{0,1\}^*} s \cdot u = t$ oraz sR_2t wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists_{u \in \{2,3\}^*} s \cdot u = t$. Struktura $T_{2,2}$ zilustrowana jest na poniższym rysunku.

Rysunek 4.3: $T_{2,2}$

Przyjrzyjmy się strukturze $T_{2,2}$ nieco bliżej. Rozważmy pewne elementy struktury $T_{2,2}$. Niech będą to ciągi $(0, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 1, 2)$ oraz $(3, 3, 2, 1, 1, 3, 1)$. W nawiązaniu do oznaczeń z Twierdzenia 4.4

$$(\underbrace{0, 1, 1}_{a_{i_1}}, \underbrace{3, 2, 3, 2}_{b_{i_2}}, \underbrace{1}_{a_{i_3}}, \underbrace{2}_{b_{i_4}}, \underbrace{}_{a_1})$$

jest ciągiem długości 5, a

$$(\underbrace{}_{a_1}, \underbrace{3, 3, 2}_{b_{i_2}}, \underbrace{1, 1}_{a_{i_3}}, \underbrace{3}_{b_{i_4}}, \underbrace{1}_{a_{i_5}}, \underbrace{}_{b_1})$$

jest ciągiem długości 6. Zapis ściśle odpowiadający zapisowi z Twierdzenia 4.4 przyjmuje następującą postać: $((0, 1, 1), (3, 2, 3, 2), (1), (2), \emptyset)$ dla pierwszego ciągu oraz $(\emptyset, (3, 3, 2), (1, 1), (3), (1), \emptyset)$ dla ciągu drugiego. Przykłady te pokazują, że kolejne wyrazy ciągów będących światami struktury $T_{2,2}$ nie muszą odpowiadać kolejnym wyrazom ciągów opisanych w metodzie dowodowej Twierdzenia 4.4.

Aby wykazać, że każda R_1 -spójna składowa jest izomorficzna z T_2 wybierzmy dowolny element s struktury $T_{2,2}$, którego ostatnim elementem jest 2 lub 3, to znaczy

$$s = (\dots, \underbrace{}_{\in \{2,3\}}).$$

Wówczas nie istnieje takie $l \in W \setminus \{s\}$, że lR_1s oraz sR_1t dla wszystkich $t \in W$ będących przedłużeniem ciągu s postaci $s \cdot u$, gdzie $u \in \{0, 1\}^*$. Szukanym izomorfizmem zadany na R_1 -spójnej składowej generowanej przez element s jest $t \mapsto u$, gdzie $t = s \cdot u$ oraz $u \in \{0, 1\}^*$. Analogicznie postępujemy z R_2 -spójnymi składowymi struktury $T_{2,2}$.

Ponieważ wszystkie R_1 -spójne oraz R_2 -spójne składowe struktury $T_{2,2}$ są izomorficzne z $S4$ -strukturą T_2 , więc $T_{2,2}$ jest $S4 \otimes S4$ -strukturą. Zatem,

$$S4 \otimes S4 \vdash \varphi \implies T_{2,2} \models \varphi. \quad (4.7)$$

Aby udowodnić prawdziwość przeciwnej implikacji, rozważmy strukturę $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ z rodziny $PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$. Korzeń struktury \mathfrak{B} nazwijmy x_r . Niech x_0 oraz x_1 będą bezpośrednimi następnikami x_r względem relacji S_1 , a x_2 oraz x_3 będą bezpośrednimi następnikami x_r względem relacji S_2 . Ogólnie, założmy, że pewien element zbioru V posiada opis x_{p_1, \dots, p_k} dla pewnych $p_1, \dots, p_k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Jego bezpośrednie następniki względem relacji S_1 nazwijmy $x_{p_1, \dots, p_k, 0}$ oraz $x_{p_1, \dots, p_k, 1}$, a bezpośrednio następniki względem relacji S_2 nazwijmy $x_{p_1, \dots, p_k, 2}$ oraz $x_{p_1, \dots, p_k, 3}$. W ten sposób każdy element uniwersum V zostanie opisany. Wynika to z faktu, iż x_r jest korzeniem, a każdy

świat ma dokładnie dwa bezpośrednie następniki względem każdej z relacji. Wówczas p -morfizmem przekształcającą strukturę $T_{2,2}$ na strukturę \mathfrak{B} jest odwzorowanie f określone następująco:

$$f(\emptyset) = x_r$$

oraz

$$f((p_1, \dots, p_k)) = x_{p_1, \dots, p_k}.$$

Ponieważ każdy element struktury \mathfrak{B} posiada opis postaci x_{p_1, \dots, p_k} i jest obrazem ciągu (p_1, \dots, p_k) , więc f jest surjekcją. Jeśli $t = s \cdot u$ dla pewnego $u \in \{0, 1\}^*$, to wówczas $x_s S_1 x_t$. Zatem zachodzi implikacja

$$sR_1 t \Rightarrow f(s)S_1 f(t).$$

Zweryfikujmy drugi warunek definicji p -morfizmu. W tym celu założymy, że $f((p_1, \dots, p_k))S_1 x'$. Wówczas $f((p_1, \dots, p_k)) = x_{p_1, \dots, p_k}$ oraz x' posiada opis wygenerowany za pomocą elementu x_{p_1, \dots, p_k} . Jest nim $x_{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+n}}$ dla pewnych $p_{k+1}, \dots, p_{k+n} \in \{0, 1\}$. Zatem

$$x_{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+n}} = f((p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+n}))$$

oraz

$$(p_1, \dots, p_k)R_1(p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_{k+n}).$$

Analogicznie postępujemy dla relacji R_2 oraz S_2 . A więc odwzorowanie f jest p -morfizmem przekształcającą strukturę $T_{2,2}$ na strukturę \mathfrak{B} . Stąd,

$$T_{2,2} \models \varphi \implies PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2) \models \varphi. \quad (4.8)$$

Implikacje 4.7, 4.8 oraz równoważność 4.6 wykazują, że struktura $T_{2,2}$ charakteryzuje system $S4 \otimes S4$. \square

System opisany przez Woltera jest przykładem wskazującym jednocześnie cechy wspólne, jak i różnice pomiędzy obiema metodami. Wartym uwagi jest fakt, iż rodzina $PGS(\mathcal{C}_1)$ oraz \mathcal{C}_1 są identyczne. Również wyróżniona $S5$ -struktura posiada punkt \mathcal{C}_1 -startowy, który jest jednocześnie $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzeniem. Inaczej ma się sytuacja w przypadku systemu $Grz.3B_2$. Rodziny \mathcal{C}_2 oraz $PGS(\mathcal{C}_2)$ nie są identyczne, ale $\mathcal{C}_2 \subsetneq PGS(\mathcal{C}_2)$. Struktura $\circ \rightarrow \circ$ nie posiada punktu \mathcal{C}_2 -startowego, ale posiada $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzeń.

System ($S5 \otimes Grz.3B_2$).

Rodzina struktur ukorzenionych, która charakteryzuje system $S5$ jest rodzina \mathcal{C}_1 skończonych klastrow o co najmniej dwóch elementach. Jest ona

domknięta na podstruktury generowane przez pojedyncze punkty. Oznacza to, że $\mathcal{C}_1 = PGS(\mathcal{C}_1)$. Również wyróżniona struktura będzie taka sama jak w przykładzie opisującym strukturę charakteryzującą system $S5 \otimes Grz.3B_2$ zawartym w rozdziale 3. Wyróżnioną $S5$ -strukturą jest

$$\mathfrak{F}^1 = \langle \{a_1, a_2, \dots\}, \{a_1, a_2, \dots\} \times \{a_1, a_2, \dots\} \rangle.$$

Rolę \mathcal{C}_1 -korzenia pełni punkt a_1 .

Klasa $\mathcal{C}_2 = \{\circ \rightarrow \circ\}$ charakteryzująca system $Grz.3B_2$ nie jest domknięta na podstruktury generowane przez pojedyncze punkty. Jej domknięciem jest zbiór $PGS(\mathcal{C}_2) = \{\circ \rightarrow \circ, \circ\}$. Wówczas $Grz.3B_2$ -strukturą z $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzeniem jest

$$\mathfrak{F}^2 = \circ \rightarrow \circ = \langle \{b_1, b_3\}, \{(b_1, b_1), (b_3, b_3), (b_1, b_3)\} \rangle.$$

Rolę $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzenia pełni element b_1 .

Z Twierdzenia 2.1 oraz punktu (i) Lematu 4.3 wynika, że $S5 \otimes Grz.3B_2 = \text{Log}\{PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)\}$, gdzie $PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ jest rodziną skończonych struktur ukorzenionych postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$, których S_1 -spójne składowe są klasami skończonymi o co najmniej dwóch elementach, a S_2 -spójne składowe są izomorficzne z $\circ \rightarrow \circ$ lub \circ . Zatem prawdziwa jest następująca równoważność:

$$S5 \otimes Grz.3B_2 \vdash \varphi \iff PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2) \Vdash \varphi. \quad (4.9)$$

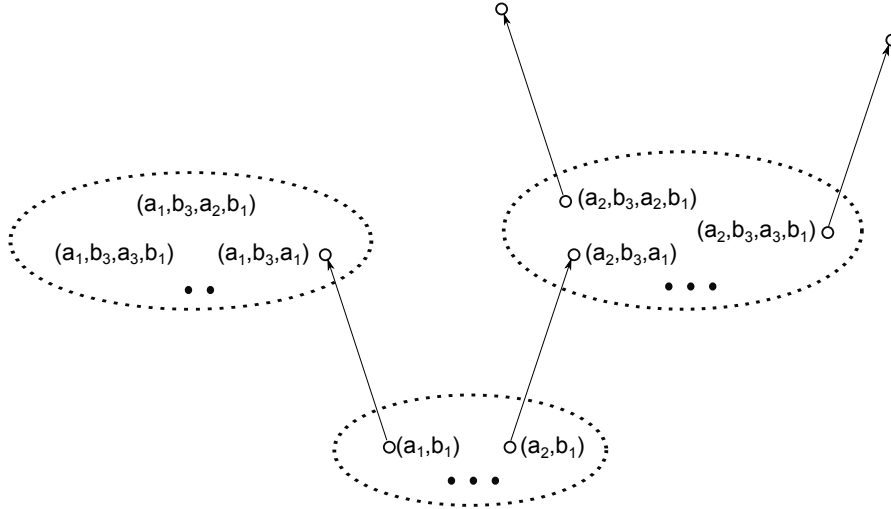
Opiszmy następnie strukturę charakteryzującą system $S5 \otimes Grz.3B_2$. Niech $\mathfrak{F}_{Wr} = \langle W, R, B \rangle$ będzie przeliczalną strukturą zbudowaną przy pomocy elementów struktur \mathfrak{F}^1 oraz \mathfrak{F}^2 naprzemiennie. Dokładniej,

$$W = \{(a_{i_1}, b_3, a_{i_3}, b_3, \dots, c'_{i_{n-1}}, c_1) : n \in \{2, 3, \dots\}, c', c \in \{a, b\} \text{ oraz } c' \neq c, \\ a_{i_1} \in \{a_1, a_2, \dots\}, a_{i_k} \in \{a_2, a_3, \dots\}, \text{ dla nieparzystych } k \in \{3, \dots, n-1\}\}.$$

Relacje R oraz B są relacjami binarnymi na W i działają następująco:

- $\underbrace{(a_{i_1}, b_3, a_{i_3}, \dots, b_3, a_1)}_n R \underbrace{(a_{j_1}, b_3, a_{j_3}, \dots, b_3, a_1)}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$
- $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1) R (a_{j_1}, b_3, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-3}} = a_{j_{n-3}}$
- $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1) R \underbrace{(a_{j_1}, b_3, \dots, b_3, a_1)}_{n-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-3}} = a_{j_{n-3}}$

- $(\underbrace{a_{i_1}, b_3, \dots, b_3}_{n-1}, a_1)R(a_{j_1}, b_3, \dots, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-3}} = a_{j_{n-3}}$
- $(a_{i_1}, b_3, \dots, b_3, a_{i_{n-1}}, b_1)B(a_{j_1}, b_3, \dots, b_3, a_{j_{n-1}}, b_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-1}} = a_{j_{n-1}}$
- $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-2}}, b_3, a_1)B(a_{j_1}, b_3, \dots, a_{j_{n-2}}, b_3, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$
- $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-2}}, b_1)B(a_{j_1}, b_3, \dots, a_{j_{n-2}}, b_3, a_1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $a_{i_1} = a_{j_1}, \dots, a_{i_{n-2}} = a_{j_{n-2}}$

Rysunek 4.4: \mathfrak{F}_{Wr}

Struktura \mathfrak{F}_{Wr} jest ukorzeniona. Jej korzeniem jest punkt (a_1, b_1) . Dowód, że każda R -spójna składowa jest izomorficzna z klastrem \mathfrak{F}^1 , a każda B -spójna składowa jest izomorficzna z $\circ \rightarrow \circ$ przebiega analogicznie, jak w przykładzie z rozdziału 3 dotyczącym systemu $S5 \otimes Grz.3B_2$. Tym samym:

$$S5 \otimes Grz.3B_2 \vdash \varphi \implies \mathfrak{F}_{Wr} \Vdash \varphi. \quad (4.10)$$

Opiszmy odpowiedni p -morfizm. Niech $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$ będzie pewnym elementem rodziny $PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ oraz niech $(a_1, b_1)'$ będzie korzeniem struktury \mathfrak{B} , a $(a_2, b_1)', \dots, (a_{n_0}, b_1)'$ będą oznaczeniami pozostałych elementów klastra zawierającego korzeń $(a_1, b_1)'$. Każdy z tych elementów należy do

pewnej S_2 -spójnej składowej (składowej postaci $\circ \rightarrow \circ$ lub \circ). Niech x będzie takim elementem S_2 -spójnej składowej zawierającej $(a_{i_1}, b_1)'$, że nie istnieje takie $t \in V \setminus \{x\}$, że xS_2t . Element x opisujemy jako $(a_{i_1}, b_3, a_1)'$. Postępujemy tak dla wszystkich $i_1 \in \{1, \dots, n_0\}$. W następnym kroku opisujemy elementy S_1 -spójnych składowych zawierających ciąg $(a_{i_1}, b_3, a_1)'$, $i_1 \in \{1, \dots, n_0\}$. Elementy różne od $(a_{i_1}, b_3, a_1)'$ oznaczamy

$$(a_{i_1}, b_3, a_2, b_1)', \dots, (a_{i_1}, b_3, a_{n_{i_1, i_2}}, b_1)',$$

gdzie n_{i_1, i_2} jest liczbą wszystkich elementów tego klastra. Załóżmy, że element $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)'$ jest opisany dla pewnej parzystej liczby naturalnej n . Niech x będzie takim elementem, że $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)'S_2x$ oraz nie istnieje takie $t \in V \setminus \{x\}$, że xS_2t . Element x opisujemy jako $(a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-1}}, b_3, a_1)'$. W przypadku, gdy opisany jest element $(a_{i_1}, b_3, \dots, b_3, a_1)'$ dla pewnej nieparzystej liczby naturalnej n , to pozostałe elementy S_1 -klastra zawierającego ten element opisujemy jako $(a_{i_1}, b_3, \dots, b_3, a_{i_n}, b_1)'$, $i_n \in \{2, \dots, n_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}\}$, gdzie $n_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ jest liczbą elementów rozważanego S_1 -klastra. Szukanym p -morfizmem z \mathfrak{F}_{W_r} w \mathfrak{B} jest:

$$f((a_{i_1}, b_3, \dots, b_3, a_1)) = (a_{i'_1}, b_3, \dots, a_{i'_{n-2}}, b_3, a_1)',$$

$$f((a_{i_1}, b_3, \dots, a_{i_{n-1}}, b_1)) = (a_{i'_1}, b_3, \dots, b_3, a_{i'_{n-1}}, b_1)',$$

gdzie $i'_k = \min\{i_k; n_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}\}$.

Struktura \mathfrak{F}_{W_r} jest podstrukturą struktury \mathfrak{F}_W (Rozdział 3) generowaną przez punkt (a_1, b_1) . Odwzorowanie p -morficzne dla obydwu struktur jest zdefiniowane analogicznie. Dowód, że f jest p -morfizmem polega na rozpatrzeniu niektórych podprzypadków opisanych dla odwzorowania przekształcającego strukturę \mathfrak{F}_W .

Możliwość p -morficznego odwzorowania struktury \mathfrak{F}_{W_r} na dowolny element rodziny $PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2)$ pozwala stwierdzić prawdziwość poniższej implikacji:

$$\mathfrak{F}_{W_r} \Vdash \varphi \implies PGS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2) \Vdash \varphi. \quad (4.11)$$

Implikacja ta wraz z implikacją 4.10 oraz równością 4.9 wykazuje, że struktura \mathfrak{F}_{W_r} charakteryzuje system $S5 \otimes Grz.3B_2$. \square

Rozdział 5

Porównanie metody z punktem \mathcal{C} -startowym i metody \mathcal{C} -korzenia

W rozdziale tym porównamy konstrukcje opisane w dowodach Twierdzeń 3.5 oraz 4.4. Opiszemy zależność pomiędzy strukturą z punktem \mathcal{C} -startowym i strukturą z \mathcal{C} -korzeniem oraz udowodnimy, że struktura otrzymana metodą \mathcal{C} -korzenia jest generowaną podstrukturą struktury otrzymanej metodą punktu \mathcal{C} -startowego. Wrócimy do problemu tabularności fuzji systemów tabularnych. Zagadnienie to zostało poruszone podczas omawiania systemu $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$.

Analizując przykłady struktur charakteryzujących system $\text{Grz.3} \otimes \text{Grz.3}$, można zauważyć pewną zależność pomiędzy strukturą z punktem \mathcal{C} -startowym a strukturą z \mathcal{C} -korzeniem dla rozważanej rodziny \mathcal{C} . Na ich podstawie wnioskuję, iż jeżeli \mathcal{C} jest rodziną struktur ukorzenionych, która charakteryzuje system L oraz \mathfrak{F} jest L -strukturą z punktem \mathcal{C} -startowym x_0 , to $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ jest L -strukturą z \mathcal{C} -korzeniem. Co więcej, stwierdzenie to można uogólnić w następujący sposób.

Lemat 5.1. *Niech $\mathcal{C} = \{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ będzie rodziną struktur charakteryzującą system L oraz niech \mathfrak{F} będzie L -strukturą z punktem \mathcal{C} -startowym x_0 . Wówczas $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ jest L -strukturą z $\text{PGS}(\mathcal{C})$ -korzeniem. Ponadto, $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ charakteryzuje system L .*

Dowód. Z Wniosku 4.2 wynika, że $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ jest L -strukturą, to znaczy

$$L \vdash \varphi \Rightarrow [x_0]_{\mathfrak{F}} \Vdash \varphi.$$

Punkt x_0 jest punktem \mathcal{C} -startowym, więc każde odwzorowanie $f(x_0) \in \mathfrak{F}_i$ można rozszerzyć do p -morfizmu dla dowolnego $i \in I$. Wówczas elementy struktury $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ są odwzorowywane na elementy struktury $[f(x_0)]_{\mathfrak{F}_i} \in$

$PGS(\mathcal{C})$. Oznacza to, że każdy struktura z rodziny $PGS(\mathcal{C})$ jest p -morficznym obrazem struktury $[x_0]_{\mathfrak{F}}$. Czyli $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ jest L -strukturą z $PGS(\mathcal{C})$ -korzeniem. Więc

$$[x_0]_{\mathfrak{F}} \models \varphi \Rightarrow PGS(\mathcal{C}) \models \varphi.$$

Z punktu (i) Lematu 4.3 wiadomo, iż $\text{Log}\{\mathcal{C}\} = \text{Log}\{PGS(\mathcal{C})\}$. Zatem $[x_0]_{\mathfrak{F}}$ charakteryzuje system L . \square

Wniosek 5.2. *Założmy, że \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 są rodzinami struktur spójnych, które charakteryzują systemy jednomodalne L_1 oraz L_2 , odpowiednio. Niech \mathfrak{F}^1 będzie przeliczalną L_1 -strukturą z punktem \mathcal{C}_1 -startowym a_1 oraz \mathfrak{F}^2 będzie przeliczalną L_2 -strukturą z punktem \mathcal{C}_2 -startowym b_1 , a $\mathfrak{F} = \langle W, R, B \rangle$ strukturą otrzymaną przy ich pomocy z zastosowaniem metody punktu \mathcal{C} -startowego. Wówczas struktura $[(a_1, b_1)]_{\mathfrak{F}}$ charakteryzuje system $L_1 \otimes L_2$.*

Dowód. Z Lematu 4.3 wnioskujemy, że rodziny $PGS(\mathcal{C}_1)$ oraz $PGS(\mathcal{C}_2)$ charakteryzują systemy L_1 oraz L_2 , odpowiednio. Ponadto $[a_1]_{\mathfrak{F}^1}$ jest L_1 -strukturą z $PGS(\mathcal{C}_1)$ -korzeniem, a $[b_1]_{\mathfrak{F}^2}$ jest L_2 -strukturą z $PGS(\mathcal{C}_2)$ -korzeniem, co wynika z Lematu 5.1.

Niech $\mathfrak{F}_r = \langle W_r, R_r, B_r \rangle$ będzie strukturą otrzymaną przy pomocy metody z dowodu Twierdzenia 4.4 z struktur $[a_1]_{\mathfrak{F}^1}$ oraz $[b_1]_{\mathfrak{F}^2}$. Struktura \mathfrak{F}_r charakteryzuje system $L_1 \otimes L_2$. Elementy zbioru W_r są konstruowane tak samo jak elementy zbioru W . Struktura $[a_1]_{\mathfrak{F}^1}$ jest podstrukturą \mathfrak{F}^1 , a struktura $[b_1]_{\mathfrak{F}^2}$ jest podstrukturą \mathfrak{F}^2 . W związku z tym wnioskujemy, że $W_r \subseteq W$. Również relacje R_r oraz B_r definiujemy tak samo jak R oraz B , odpowiednio. A więc $R_r = R|_{W_r}$ oraz $B_r = B|_{W_r}$. Oznacza to, że struktura \mathfrak{F}_r jest podstrukturą struktury \mathfrak{F} .

Następnie wykażemy, że \mathfrak{F}_r jest generowaną podstrukturą struktury \mathfrak{F} . Niech $c_1 \in W$ będzie ciągiem długości m oraz $c_2 \in W$ będzie ciągiem długości n . Zauważmy, że jeśli ciąg c_2 jest osiągalny z ciągu c_1 przy pomocy relacji R lub B , to $|m - n| \leq 1$, a elementy tych ciągów pokrywają się do miejsca $k - 2$, gdzie $k = \max\{n, m\}$. Na miejscu $k - 1$ ciągu c_2 może się znaleźć:

- ten sam element, co w ciągu c_1 na miejscu $k - 1$
- następnik $(k - 1)$ -go elementu z ciągu c_1 (następnik w strukturze \mathfrak{F}^1 lub \mathfrak{F}^2)
- któryś z punktów startowych a_1 lub b_1 .

Oznacza to, że dla wszystkich $c_1, c_2 \in W$ zachodzi implikacja:

$$c_1 \in \mathfrak{F}_r \wedge (c_1 R c_2 \vee c_1 B c_2) \implies c_2 \in \mathfrak{F}_r. \quad (5.1)$$

Powyższa implikacja i fakt, że element (a_1, b_1) jest korzeniem struktury \mathfrak{F}_r , prowadzi do równości:

$$\mathfrak{F}_r = [(a_1, b_1)]_{\mathfrak{F}}. \quad (5.2)$$

□

Wybór metody tworzenia struktury charakteryzującej fuzję systemów zależy od elementów rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 . Na podstawie struktur opisanych dla systemu $Grz.3 \otimes Grz.3$ oraz $S5 \otimes Grz.3B_2$ wnioskujemy, iż konstrukcja z \mathcal{C} -korzeniem generuje mniej światów. Dlatego, jeśli wszystkie struktury wchodzące w skład rodzin \mathcal{C}_1 oraz \mathcal{C}_2 są ukorzenione, wygodniej użyć konstrukcji z \mathcal{C} -korzeniem. W niektórych przypadkach możemy nie mieć wyboru. Istotnie, jeśli nie wszystkie elementy rodziny \mathcal{C}_1 lub \mathcal{C}_2 są ukorzenione i nie chcemy modyfikować tych rodzin, to pozostaje stosowanie metody punktu \mathcal{C} -startowego.

Na podstawie przykładu systemu $\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$ stwierdziliśmy, że fuzja systemów tabularnych nie musi być systemem tabularnym. Struktura $\mathfrak{F} = \langle W, R, B \rangle$ charakteryzująca fuzję systemów L_1 oraz L_2 jest tworzona stopniowo. Załóżmy, że $\mathfrak{F}^1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ jest strukturą z punktem \mathcal{C}_1 -startowym (lub \mathcal{C}_1 -korzeniem) oraz $\mathfrak{F}^2 = \langle W_2, R_2 \rangle$ jest strukturą z punktem \mathcal{C}_2 -startowym (lub \mathcal{C}_2 -korzeniem). Ponadto, niech $W_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ oraz $W_2 = \{b_1, \dots, b_m\}$. Na początku konstruujemy R -spójną składową izomorficzną z \mathfrak{F}^1 . W tym momencie zbiór W składa się z n elementów. W następnym kroku każdy świat pierwszej składowej pełni rolę punktu \mathcal{C}_2 -startowego (\mathcal{C}_2 -korzenia) dla każdej nowej B -spójnej składowej. Każda taka składowa zwiększa ilość światów struktury \mathfrak{F} o $m - 1$. Analogicznie postępujemy z nowymi punktami B -spójnych składowych. Każdy taki punkt staje się punktem \mathcal{C}_1 -startowym (\mathcal{C}_1 -korzeniem) dla elementów nowo powstałych R -spójnych składowych. Kolejne spójne składowe konstruowanej struktury powodują jej rozrastanie się. Konstrukcja nie będzie generowała nowych światów w przypadku, gdy przynajmniej jeden ze zbiorów W_1 lub W_2 jest jednoelementowy. Tego typu sytuacja została opisana w przykładzie dotyczącym systemu $S4GrzB_2 \otimes Tr$.

Możemy zatem wyciągnąć wniosek, że konstrukcja z dowodu Twierdzenia 4.4 generuje skończoną strukturę, jeśli jeden z systemów jest tabularny, a drugim jest $\text{Log}\{\circ\}$ lub $\text{Log}\{\bullet\}$.

Rozdział 6

Inne struktury charakteryzujące fuzje systemów jednomodalnych

Konstrukcje z punktem \mathcal{C} -startowym i \mathcal{C} -korzeniem nie generują wszystkich struktur Kripkego, które charakteryzują fuzję systemów jednomodalnych. Jednym z przykładów jest struktura opisana w [11]. Charakteryzuje ona system $S5 \otimes S5$. Podobnie jak w strukturze otrzymanej metodą punktu \mathcal{C} -startowego i \mathcal{C} -korzenia, spójne składowe odpowiadające jednej relacji są nieskończonymi klastrami. Jednakże w poniżej opisanej strukturze, przekrój klastrów odpowiadających różnym relacjom jest zbiorem pustym lub zbiorem nieskończonym.

System $(S5 \otimes S5)$.

Niech $\mathfrak{F} = \langle W, R, B \rangle$ będzie strukturą, gdzie światami są ciągi liczb naturalnych. Dokładniej,

$$W = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n : n \in \{2, 3, \dots\}\},$$

a relacje R oraz B są relacjami binarnymi na W działającymi następująco:

$(a_1, \dots, a_n)R(b_1, \dots, b_m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy :

- $n = m = 2$ lub
- $2 < m = n$ są parzyste i $a_1 = b_1, \dots, a_{n-2} = b_{n-2}$ lub
- $m = n$ są nieparzyste i $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest nieparzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$.

$(a_1, \dots, a_n)B(b_1, \dots, b_m)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $m = n$ są parzyste i $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ lub
- $m = n$ są nieparzyste i $a_1 = b_1, \dots, a_{n-2} = b_{n-2}$ lub
- $k = \min\{n, m\}$ jest parzyste, $|n - m| = 1$ oraz $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$.

Obie relacje są relacjami równoważności, więc $\mathfrak{F} \models T^i, 4^i, B^i$ dla $i = 1, 2$. Oznacza to, że \mathfrak{F} jest $S5 \otimes S5$ -strukturą. Ponadto, \mathfrak{F} jest strukturą spójną. Rozpocznijmy szczegółowy opis rozważanej struktury. Niech R^0 oznacza R -klastery zawierający wszystkie ciągi długości 2. Przez B^{n_1} oznaczamy B -klastery zawierający wszystkie ciągi długości 2 oraz 3, których pierwszym elementem jest n_1 . Następnie R^{n_1, n_2} jest R -klastrem, który zawiera wszystkie ciągi długości 3 oraz 4 zaczynające się od elementów n_1, n_2 . Ogólnie, dla każdego $l \in \{1, 3, 5, \dots\}$ niech B^{n_1, \dots, n_l} będzie B -klastrem zawierającym wszystkie ciągi długości $l + 1$ oraz $l + 2$ zaczynające się elementami n_1, \dots, n_l . Analogicznie, dla wszystkich $l \in \{2, 4, 6, \dots\}$ niech R^{n_1, \dots, n_l} będzie R -klastrem zawierającym wszystkie ciągi długości $l + 1$ oraz $l + 2$ zaczynające się elementami n_1, \dots, n_l . Można zauważyć, że dla każdego $n_1 \in \mathbb{N}$ zbiory $R^0 \cap B^{n_1}$ oraz $R^0 \setminus B^{n_1}$ zawierają nieskończenie wiele elementów. Wszystkie zbiory $R^{n_1, \dots, n_k} \cap B^{n_1, \dots, n_{k-1}}$, $R^{n_1, \dots, n_k} \setminus B^{n_1, \dots, n_{k-1}}$, $B^{n_1, \dots, n_{k+1}} \cap R^{n_1, \dots, n_k}$ oraz $B^{n_1, \dots, n_{k+1}} \setminus R^{n_1, \dots, n_k}$ mają nieskończenie wiele elementów dla każdego $k \in \{2, 4, 6, \dots\}$. W pozostałych przypadkach zdefiniowane zbiory mają puste przekroje. Zauważmy, że:

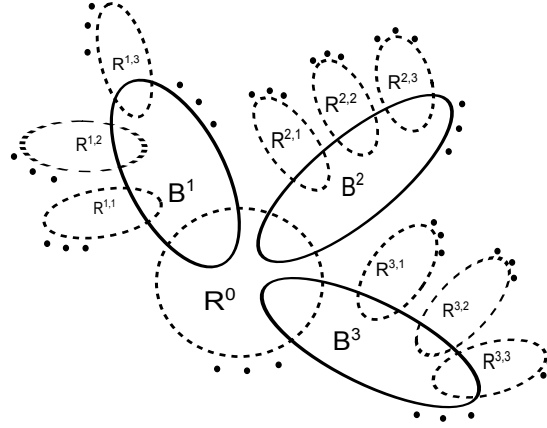
$$R^0 \cap B^{n_1} = \{(n_1, n_2) : n_2 \in \mathbb{N}\} \text{ dla } n_1 \in \mathbb{N}.$$

Ponadto, jeśli l jest nieparzyste, to:

$$B^{n_1, \dots, n_l} \cap R^{n_1, \dots, n_l, n_{l+1}} = \{(n_1, \dots, n_{l+2}) : n_{l+2} \in \mathbb{N}\} \text{ dla } n_1, \dots, n_{l+1} \in \mathbb{N}.$$

Natomiast, jeśli l jest parzyste, to:

$$R^{n_1, \dots, n_l} \cap B^{n_1, \dots, n_l, n_{l+1}} = \{(n_1, \dots, n_{l+2}) : n_{l+2} \in \mathbb{N}\} \text{ dla } n_1, \dots, n_{l+1} \in \mathbb{N}.$$

Rysunek 6.1: \mathfrak{F}

Rozważmy skończoną i spójną $S5 \otimes S5$ -strukturę $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2 \rangle$. Dovolnie wybrany S_1 -klastery oznaczmy przez S_1^0 . Niech $S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{m_0}$ oznaczają wszystkie parami różne S_2 -klastry mające niepusty przekrój z S_1^0 , gdzie m_0 jest liczbą wszystkich takich klastrów. Następnie, niech $S_1^{k_1,1}, S_1^{k_1,2}, \dots, S_1^{k_1,m_{k_1}}$ oznaczają wszystkie parami różne S_1 -klastry, które mają niepusty przekrój z $S_2^{k_1}$, $k_1 \in \{1, 2, \dots, m_0\}$, gdzie m_{k_1} jest liczbą takich klastrów. Przypuśćmy, że $S_2^{k_1, \dots, k_l}$ jest zdefiniowany dla pewnego $l \in \{1, 3, 5, \dots\}$ oraz m_{k_1, \dots, k_l} jest liczbą wszystkich parami różnych S_1 -klastrów, które mają niepusty przekrój z $S_2^{k_1, \dots, k_l}$. Klastry te opisujemy $S_1^{k_1, \dots, k_l, 1}, S_1^{k_1, \dots, k_l, 2}, \dots, S_1^{k_1, \dots, k_l, m_{k_1, \dots, k_l}}$. Analogicznie, jeśli posiadamy opis $S_1^{k_1, \dots, k_l}$ dla pewnego $l \in \{2, 4, 6, \dots\}$, przez $S_2^{k_1, \dots, k_l, 1}, S_2^{k_1, \dots, k_l, 2}, \dots, S_2^{k_1, \dots, k_l, m_{k_1, \dots, k_l}}$ opisujemy wszystkie parami różne S_2 -klastry mające niepusty przekrój z $S_1^{k_1, \dots, k_l}$. Procedura opisywania nie kończy się, dlatego każdy klastery będzie nazwany nieskończenie wiele razy. Przy pomocy opisu dla klastrów można opisać każdy element zbioru V w sposób następujący:

$$S_1^0 \cap S_2^{k_1} = \{x_1^{k_1}, x_2^{k_1}, \dots, x_{t_{k_1}}^{k_1}\} \text{ dla } k_1 \in \{1, \dots, m_0\}$$

Ogólnie, jeśli l jest liczbą nieparzystą, to dla $k_1 \in \{1, \dots, m_0\}$ oraz $k_i \in \{1, \dots, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ mamy:

$$S_2^{k_1, \dots, k_l} \cap S_1^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}} = \{x_1^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}}, x_2^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}}, \dots, x_{t_{k_1, \dots, k_{l+1}}}^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}}\}.$$

Natomiast, jeśli l jest liczbą parzystą, dla $k_1 \in \{1, \dots, m_0\}$ oraz $k_i \in \{1, \dots, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dostaniemy:

$$S_1^{k_1, \dots, k_l} \cap S_2^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}} = \{x_1^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}}, x_2^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}}, \dots, x_{t_{k_1, \dots, k_{l+1}}}^{k_1, \dots, k_l, k_{l+1}}\},$$

gdzie $t_{k_1, \dots, k_{l+1}}$ jest liczbą elementów odpowiednich przekrojów. W ten sposób każdy element zbioru V zostanie nazwany nieskończenie wiele razy.

Niech $f: W \rightarrow V$ będzie odwzorowaniem zdefiniowanym następująco:

$$f((n_1, \dots, n_l)) = x_z^{k_1, \dots, k_{l-1}},$$

gdzie $k_1 = \min\{n_1, m_0\}$ oraz $k_i = \min\{n_i, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, l-1\}$ i $n_l = z \pmod{t_{k_1, \dots, k_{l-1}}}$.

Aby zakończyć dowód, iż struktura \mathfrak{F} charakteryzuje system $S5 \otimes S5$, należy wykazać, że odwzorowanie f jest p-morfizmem. Każdy punkt struktury \mathfrak{B} należy do przekroju dwóch klastrów i posiada nazwę postaci $x_z^{k_1, \dots, k_{l-1}}$. Można zauważyć, że $x_z^{k_1, \dots, k_{l-1}} = f((k_1, \dots, k_{l-1}, z))$, zatem odwzorowanie f jest surjekcją. Przed przeprowadzeniem formalnego dowodu warto przeanalizować kilka typowych przypadków.

- Przypadek I (Rysunek 6.2) Załóżmy, że

$$S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, i} \neq \emptyset \neq S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, i} \setminus S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}}$$

dla $i \in \{1, 2\}$ i nie istnieją inne S_2 -klastry, które mają niepusty przekrój z $S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}}$. Wówczas:

$$f(R^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap B^{k_1, \dots, k_{l-1}, 1}) = S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 1}$$

oraz

$$f(R^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap B^{k_1, \dots, k_{l-1}, j}) = S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 2}$$

dla $j \geq 2$.

- Przypadek II (Rysunek 6.3) Następnie załóżmy, że

$$S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}} \subsetneq S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 1}.$$

Wówczas:

$$f(R^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap B^{k_1, \dots, k_{l-1}, j}) = S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}}$$

dla $j \in \mathbb{N}$.

- Przypadek III (Rysunek 6.4) Zakładamy, że

$$S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 1} \subsetneq S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}}$$

oraz

$$S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 2} \neq \emptyset$$

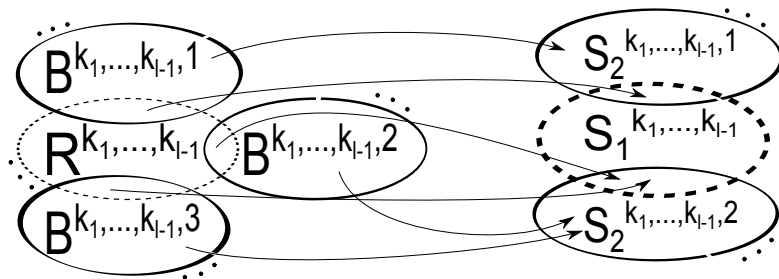
i nie istnieją inne S_2 -klastry, które mają niepusty przekrój z $S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}}$.
Wówczas:

$$f(R^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap B^{k_1, \dots, k_{l-1}, 1}) = S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 1}$$

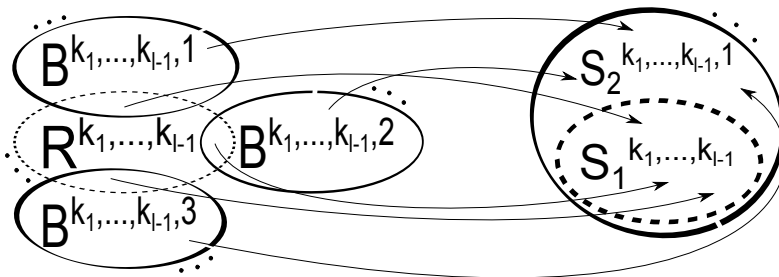
oraz

$$f(R^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap B^{k_1, \dots, k_{l-1}, j}) = S_1^{k_1, \dots, k_{l-1}} \cap S_2^{k_1, \dots, k_{l-1}, 2}$$

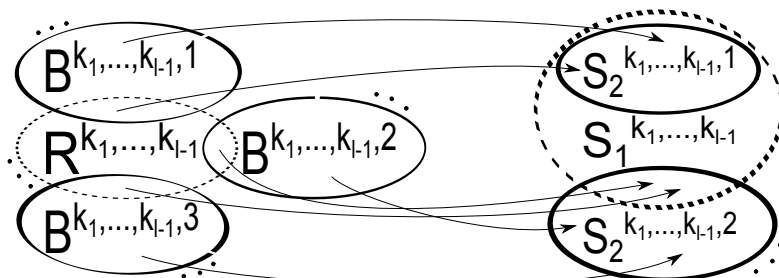
dla $j \geq 2$.



Rysunek 6.2: Przypadek I



Rysunek 6.3: Przypadek II



Rysunek 6.4: Przypadek III

Aby wykazać, że pierwszy warunek definicji p -morfizmu jest spełniony załóżmy, że $(n_1, \dots, n_p), (h_1, \dots, h_q) \in W$ oraz $(n_1, \dots, n_p)R(h_1, \dots, h_q)$.

- Przypadek I ($p = q = 2$)

Wówczas $f((n_1, n_2)) \in S_1^0$ oraz $f((h_1, h_2)) \in S_1^0$. Zatem

$$f((n_1, n_2))S_1f((h_1, h_2)).$$

- Przypadek II ($2 < p = q$ są parzyste, $n_1 = h_1, \dots, n_{t-2} = h_{t-2}$)

Mamy

$$f((n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}, n_p)) = x_z^{k_1, \dots, k_{p-2}, k_{p-1}},$$

gdzie $k_1 = \min\{n_1, m_0\}$ oraz $k_i = \min\{n_i, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, p-1\}$ i $n_p = z \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-2}, k_{p-1}}}$ oraz

$$f((n_1, \dots, n_{p-2}, h_{p-1}, h_p)) = x_{z'}^{k_1, \dots, k_{p-2}, k'_{p-1}},$$

gdzie $k'_{p-1} = \min\{h_{p-1}, m_{k_1, \dots, k_{p-2}}\}$ oraz $h_p = z' \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-2}, k'_{p-1}}}$.

Oba obrazy są elementami klastra $S_1^{k_1, \dots, k_{p-2}}$, zatem

$$f((n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}, n_p))S_1f((n_1, \dots, n_{p-2}, h_{p-1}, h_p)).$$

- Przypadek III ($s = t$ są nieparzyste, $n_1 = h_1, \dots, n_{t-1} = h_{t-1}$)

Mamy

$$f((n_1, \dots, n_{p-1}, n_p)) = x_z^{k_1, \dots, k_{p-1}},$$

gdzie $k_1 = \min\{n_1, m_0\}$, $k_i = \min\{n_i, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, p-1\}$ i $n_p = z \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-1}}}$ oraz

$$f((n_1, \dots, n_{p-1}, h_p)) = x_{z'}^{k_1, \dots, k_{p-1}},$$

gdzie $h_p = z' \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-1}}}$.

Jak poprzednio, oba obrazy są elementami klastra $S_1^{k_1, \dots, k_{p-1}}$, a więc

$$f((n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}, n_p))S_1f((n_1, \dots, n_{p-2}, h_{p-1}, h_p)).$$

- Przypadek IV ($k = \min\{p, q\}$ jest nieparzyste, $|p - q| = 1$ oraz $n_1 = h_1, \dots, n_{k-1} = h_{k-1}$)

Przypuśćmy, że $k = q$. Wówczas:

$$f((n_1, \dots, n_{p-1}, n_p)) = x_z^{k_1, \dots, k_{p-1}},$$

gdzie $k_1 = \min\{n_1, m_0\}$, $k_i = \min\{n_i, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ dla $i \in \{2, \dots, p-1\}$ i $n_p = z \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-1}}}$ oraz

$$f((n_1, \dots, n_{p-2}, h_{p-1})) = x_{z'}^{k_1, \dots, k_{p-2}},$$

gdzie $h_{p-1} = z' \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-2}}}$.

Ponownie, oba są elementami $S_1^{k_1, \dots, k_{p-2}}$, stąd

$$f((n_1, \dots, n_{p-2}, n_{p-1}, n_p)) S_1 f((n_1, \dots, n_{p-2}, h_{p-1})).$$

Następnie zweryfikujemy drugi punkt definicji p -morfizmu. Przypuśćmy, że

$$f((n_1, \dots, n_p)) S_1 x_{z_1}^{h_1, \dots, h_l}$$

oraz niech

$$f((n_1, \dots, n_p)) = x_{z_2}^{k_1, \dots, k_{p-1}},$$

gdzie $k_1 = \min\{n_1, m_0\}$, $k_i = \min\{n_i, m_{k_1, \dots, k_{i-1}}\}$ i $n_p = z_2 \pmod{t_{k_1, \dots, k_{p-1}}}$.

Rozważmy następujące przypadki:

- Przypadek I (p jest nieparzyste)

Wówczas

$$x_{z_2}^{k_1, \dots, k_{p-1}} \in S_1^{k_1, \dots, k_{p-1}}$$

oraz

$$x_{z_1}^{h_1, \dots, h_l} \in S_1^{k_1, \dots, k_{p-1}}.$$

Dlatego $x_{z_1}^{h_1, \dots, h_l}$ posiada inny opis, który wskazuje na jego przynależność do $S_1^{k_1, \dots, k_{p-1}}$. Może nim być $x_{z_3}^{k_1, \dots, k_{p-1}}$ lub $x_{z_4}^{k_1, \dots, k_{p-1}, k_p}$ dla pewnych z_3, z_4 oraz k_p . Zauważmy, że $x_{z_3}^{k_1, \dots, k_{p-1}} = f((n_1, \dots, n_{p-1}, z_3))$. Wtedy

$$(n_1, \dots, n_p) R(n_1, \dots, n_{p-1}, z_3).$$

Oczywiście $x_{z_4}^{k_1, \dots, k_{p-1}, k_p} = f((n_1, \dots, n_{p-1}, k_p, z_4))$, stąd

$$(n_1, \dots, n_p) R(n_1, \dots, n_{p-1}, k_p, z_4).$$

- Przypadek II (p jest parzyste)

Wtedy

$$x_{z_2}^{k_1, \dots, k_{p-1}} \in S_1^{k_1, \dots, k_{p-2}}$$

oraz

$$x_{z_1}^{h_1, \dots, h_l} \in S_1^{k_1, \dots, k_{p-2}}.$$

Ponownie używamy innej nazwy dla $x_{z_1}^{h_1, \dots, h_l}$, która wskazuje na przynależność do $S_1^{k_1, \dots, k_{p-2}}$. Może to być $x_{z_3}^{k_1, \dots, k_{p-2}}$ lub $x_{z_4}^{k_1, \dots, k_{p-1}}$ dla pewnych z_3 oraz z_4 . Wówczas $x_{z_3}^{k_1, \dots, k_{p-2}} = f((n_1, \dots, n_{p-2}, z_3))$, zatem

$$(n_1, \dots, n_p)R(n_1, \dots, n_{p-2}, z_3).$$

Jeśli $x_{z_4}^{k_1, \dots, k_{p-1}} = f((n_1, \dots, n_{p-1}, z_4))$, to

$$(n_1, \dots, n_p)R(n_1, \dots, n_{p-1}, z_4).$$

Strukturę \mathfrak{F} można p -morficznie odwzorować na dowolną skończoną $S5 \otimes S5$ -strukturę, więc prawdziwa jest implikacja:

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \implies S5 \otimes S5 \vdash \varphi. \quad (6.1)$$

Ponadto \mathfrak{F} jest $S5 \otimes S5$ -strukturą, zatem zachodzi równoważność:

$$S5 \otimes S5 \vdash \varphi \iff \mathcal{F} \Vdash \varphi. \quad (6.2)$$

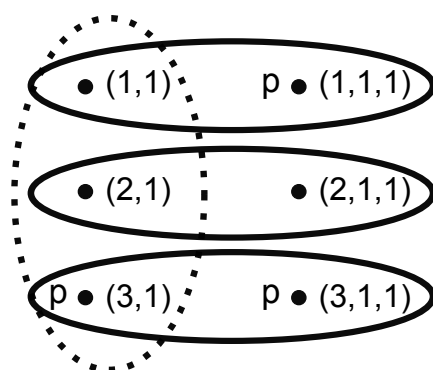
□

Zauważmy jeszcze, że aby sfalsyfikować formułę w strukturze \mathfrak{F} , wystarczy rozważyć jej skończoną podstrukturę.

Przykład 6.1. Aby wykazać, że $\Box_2(\Box_1(p \rightarrow \Box_2 p) \rightarrow p) \rightarrow (\Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow p)$ nie jest tezą systemu $S5 \otimes S5$, wystarczy znaleźć wartościowanie fałszyfikujące v . Załóżmy, że \Box_1 opisany za pomocą relacji R , a \Box_2 jest opisany za pomocą relacji B . Formułę sfalsyfikujemy w punkcie $(1, 1)$. Aby sfalsyfikować $\Diamond_1 \Box_2 p \rightarrow p$ wymagamy, aby $(\mathfrak{F}, v, (1, 1)) \not\models p$ oraz $\forall_{x \in B^3} (\mathfrak{F}, v, x) \models p$. Podstawiając $\forall_{x \in B^1 \setminus \{(1,1)\}} (\mathfrak{F}, v, x) \models p$ oraz $\exists_{x \in B^2} \mathfrak{F} \not\models p$, zapewniamy prawdziwość formuły $\Box_2(\Box_1(p \rightarrow \Box_2 p) \rightarrow p)$. Rozważmy podstrukturę $\mathfrak{F}' = \langle W', R', B' \rangle$, gdzie

$$W' = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1)\},$$

a relacje R' oraz B' są restrykcjami R oraz B , odpowiednio, do zbioru W' . Wówczas skończona $S5 \otimes S5$ -struktura \mathfrak{F}' z wartościowaniem $v' = v|_{W'}$ jest szukanym modelem.

Rysunek 6.5: \mathfrak{F}'

Rozdział 7

Konstrukcja struktury dla fuzji trzech systemów

Obydwie metody przedstawione w pracy można uogólnić na fuzję wielu systemów jednomodalnych. Wymagają one jednak pewnych modyfikacji. Rozważmy trzy systemy jednomodalne L_1 , L_2 oraz L_3 . Ponadto, niech \mathcal{C}_i będzie rodziną struktur spójnych charakteryzującą system L_i oraz niech $\mathfrak{F}^i = \langle W_i, R_i \rangle$ będzie L_i -strukturą z punktem \mathcal{C}_i -startowym dla $i = 1, 2, 3$. Załóżmy, że $W_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$, $W_2 = \{b_1, b_2, \dots\}$, $W_3 = \{c_1, c_2, \dots\}$ oraz punkty a_1 , b_1 , c_1 są punktami \mathcal{C}_i -startowymi dla $i = 1, 2, 3$. Ponadto, zbiory W_1 , W_2 oraz W_3 są parami rozłączne. W przypadku fuzji dwóch systemów każdy ciąg pełnił rolę punktu \mathcal{C} -startowego dla pewnej spójnej składowej, która odpowiadała jednej z relacji. W przypadku fuzji trzech systemów każdy ciąg pełni rolę punktu \mathcal{C} -startowego dla co najmniej dwóch spójnych składowych. Dlatego elementy a_1 , b_1 oraz c_1 nie będą występowały w ciągach. Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle W, R, B, G \rangle$, gdzie W jest zbiorem ciągów składających się z elementów zbiorów W_1 , W_2 oraz W_3 wraz z ciągiem pustym. Dokładniej,

$$W = \{(k_1, \dots, k_n) : n \in \mathbb{N}, k_i \in W_1 \cup W_2 \cup W_3 \setminus \{a_1, b_1, c_1\},$$

$$k_i \notin W_j \text{ lub } k_{i+1} \notin W_j \text{ dla } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ oraz } j \in \{1, 2, 3\} \cup \{\emptyset\}.$$

Relacje R , B oraz G są relacjami binarnymi określonymi na W następująco:

- $\emptyset R \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 R_1 a_1$.
- $(k_1, \dots, k_n) R (l_1, \dots, l_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $k_n R_1 l_n$
lub
 $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2, \dots, k_n = l_n$, $k_n \notin W_1$ oraz $a_1 R_1 a_1$.

- $(k_1, \dots, k_n)R(l_1, \dots, l_{n-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $k_n R_1 a_1$.
- $(k_1, \dots, k_{n-1})R(l_1, \dots, l_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $a_1 R_1 l_n$.
- $\emptyset B \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b_1 R_2 b_1$.
- $(k_1, \dots, k_n)B(l_1, \dots, l_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $k_n R_2 l_n$
lub
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_n = l_n, k_n \notin W_2$ oraz $b_1 R_2 b_1$.
- $(k_1, \dots, k_n)B(l_1, \dots, l_{n-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $k_n R_2 b_1$.
- $(k_1, \dots, k_{n-1})B(l_1, \dots, l_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $b_1 R_2 l_n$.
- $\emptyset G \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_1 R_3 c_1$.
- $(k_1, \dots, k_n)G(l_1, \dots, l_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $k_n R_3 l_n$
lub
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_n = l_n, k_n \notin W_3$ oraz $c_1 R_3 c_1$.
- $(k_1, \dots, k_n)G(l_1, \dots, l_{n-1})$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $k_n R_3 c_1$.
- $(k_1, \dots, k_{n-1})G(l_1, \dots, l_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ oraz $c_1 R_3 l_n$.

Zauważmy, że w skład pewnej R -spójnej składowej wchodzi ciąg pusty \emptyset oraz wszystkie ciągi długości 1 o wyrazach z $W_1 \setminus \{a_1\}$. Ta spójna składowa jest izomorficzna ze strukturą \mathfrak{F}^1 . Wymagane odwzorowanie działa następująco:

$$\begin{aligned} \emptyset &\mapsto a_1, \\ (a_i) &\mapsto a_i \text{ dla } i \in \{2, 3, \dots\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\underbrace{\emptyset}_{\mapsto a_1} R \underbrace{\emptyset}_{\mapsto a_1} \iff a_1 R_1 a_1,$$

$$\underbrace{\emptyset}_{\mapsto a_1} R \underbrace{(a_i)}_{\mapsto a_i} \iff a_1 R_1 a_i,$$

$$\underbrace{(a_i)}_{\mapsto a_i} R \underbrace{\emptyset}_{\mapsto a_1} \iff a_i R_1 a_1$$

oraz

$$\underbrace{(a_i)}_{\mapsto a_i} R \underbrace{(a_j)}_{\mapsto a_j} \iff a_i R_1 a_j.$$

Zatem rozważana R -spójna składowa jest izomorficzna ze strukturą \mathfrak{F}^1 .

Każda inna R -spójna składowa zawiera jeden element postaci (k_1, \dots, k_{n-1}) dla pewnych k_1, \dots, k_{n-1} , gdzie $k_{n-1} \notin W_1$, oraz wszystkie elementy postaci $(k_1, \dots, k_{n-1}, a_i)$ dla $i \in \{2, 3, \dots\}$. Wówczas izomorfizm na \mathfrak{F}^1 określamy następująco:

$$(k_1, \dots, k_{n-1}) \mapsto a_1,$$

$$(k_1, \dots, k_{n-1}, a_i) \mapsto a_i \text{ dla } i \in \{2, 3, \dots\}.$$

Zauważmy, że

$$\underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1})}_{\mapsto a_1} R \underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1})}_{\mapsto a_1} \iff a_1 R_1 a_1,$$

$$\underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1})}_{\mapsto a_1} R \underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1}, a_i)}_{\mapsto a_i} \iff a_1 R_1 a_i,$$

$$\underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1}, a_i)}_{\mapsto a_i} R \underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1})}_{\mapsto a_1} \iff a_i R_1 a_1$$

oraz

$$\underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1}, a_i)}_{\mapsto a_i} R \underbrace{(k_1, \dots, k_{n-1}, a_j)}_{\mapsto a_j} \iff a_i R_1 a_j.$$

Oznacza to, że każda R -spójna składowa jest izomorficzna ze strukturą \mathfrak{F}^1 . Analogicznie postępując można wykazać, że B -spójne składowe są izomorficzne ze strukturą \mathfrak{F}^2 , a G -spójne składowe są izomorficzne ze strukturą \mathfrak{F}^3 . Zatem \mathfrak{F} jest $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3$ -strukturą. To znaczy, że prawdziwa jest implikacja:

$$L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \vdash \varphi \implies \mathcal{F} \Vdash \varphi. \quad (7.1)$$

Ponadto z Twierdzenia 2.1 oraz Lematu 3.3 wiemy, iż system $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3$ jest charakteryzowany przez rodzinę $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{C}'_3)$ struktur spójnych postaci $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2, S_3 \rangle$, których S_1 -spójne składowe są izomorficzne z elementami rodziny \mathcal{C}_1 , S_2 -spójne składowe są izomorficzne z elementami rodziny \mathcal{C}_2 , a S_3 -spójne składowe są izomorficzne z elementami rodziny \mathcal{C}_3 . Co oznacza, iż poniższa równoważność jest prawdziwa:

$$L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \vdash \varphi \iff CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{C}'_3) \Vdash \varphi. \quad (7.2)$$

Aby zakończyć dowód, należy wykazać, że każdy element rodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{C}'_3)$ jest p -morficznym obrazem struktury \mathcal{F} . W tym celu rozważmy strukturę $\mathfrak{B} = \langle V, S_1, S_2, S_3 \rangle$ będącą elementem rodziny $CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{C}'_3)$. Dowód przebiega w taki sam sposób, jak w przypadku fuzji dwóch systemów. Odwzorowujemy kolejne R -spójne składowe struktury \mathcal{F} na S_1 -spójne składowe struktury \mathfrak{B} . Analogicznie postępujemy z B -spójnymi składowymi oraz G -spójnymi składowymi. Podamy tylko skrócony opis tworzenia wymaganego odwzorowania p -morficznego f . W pierwszym kroku przekształcamy ciąg pusty \emptyset na dowolny element uniwersum V . Element $f(\emptyset)$ należy do pewnej S_1 -spójnej składowej struktury \mathfrak{B} . Wszystkie elementy postaci (a_i) dla $i \in \{2, 3, \dots\}$ zostaną przekształcone na ową S_1 -spójną składową z zachowaniem warunków definicji p -morfizmu. Element \emptyset pełni rolę punktu \mathcal{C}_1 -startowego, co umożliwia nam zadanie przekształcenia f w ten sposób. W następnym kroku, zachowując warunki p -morfizmu, wszystkie elementy postaci (b_i) dla $i \in \{2, 3, \dots\}$ przekształcimy na S_2 -spójną składową struktury \mathfrak{B} zawierającą element $f(\emptyset)$. Analogicznie postępujemy z ciągami postaci (c_i) dla $i \in \{2, 3, \dots\}$. Zostaną one p -morficznie przekształcone na S_3 -spójną składową struktury \mathfrak{B} zawierającą element $f(\emptyset)$.

Następnie założymy, że pewien ciąg postaci (k_1, \dots, k_n) został już przekształcony. Oznacza to, że wszystkie ciągi długości co najwyżej n zostały już odwzorowane na strukturę \mathfrak{B} . Bez straty ogólności możemy założyć, że na ostatnim miejscu w tym ciągu jest element zbioru W_1 . Wszystkie ciągi postaci (k_1, \dots, k_n, b_i) dla $i \in \{2, 3, \dots\}$, czyli elementy należące do B -spójnej składowej zawierającej rozważany ciąg, zostaną przekształcone na S_2 -spójną składową zawierającą element $f((k_1, \dots, k_n))$ z zachowaniem warunków definicji p -morfizmu. Podobnie, wszystkie ciągi postaci (k_1, \dots, k_n, c_i) dla $i \in \{2, 3, \dots\}$ zostaną przekształcone na S_3 -spójną składową zawierającą element $f((k_1, \dots, k_n))$ z zachowaniem warunków definicji p -morfizmu. W efekcie rozszerzania przekształcenia f na kolejne spójne składowe struktury \mathfrak{F} otrzymamy pożądaną p -morfizm. Wówczas prawdziwa będzie następująca implikacja:

$$\mathcal{F} \Vdash \varphi \implies CS(\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{C}'_3) \Vdash \varphi. \quad (7.3)$$

Z implikacji 7.1, 7.3 oraz równoważności 7.2 wynika, iż struktura \mathfrak{F} charakteryzuje system $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3$.

Taki sam opis konstrukcji można zastosować do fuzji n systemów dla dowolnego $n \geq 2$.

Bibliografia

- [1] J. Van Benthem, G. Bezhanishvili, B. Ten Cate, and D. Sarenac. Multimodal logics of products of topologies. *Studia Logica*, 84(3):369 – 392, 2006.
- [2] P. Blackburn, J. Van Benthem, and F. Wolter (ed.). *Handbook of Modal Logic (Studies in Logic and Practical Reasoning)*, volume 3. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.
- [3] P. Blackburn, M. De Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic*, volume 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [4] G. Boolos. *The Logic of Provability*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] R. Bull and K. Segerberg. *Basic Modal Logic (Handbook of Philosophical Logic)*, volume 165, chapter II.1, pages 1–88. D. Reidel, Boston, 1984.
- [6] A. Chagrov and M. Zakharyashev. *Modal Logic*. Oxford logic guides. Clarendon Press, 1997.
- [7] K. Fine. Logics containing k_4 . part i. *The Journal of Symbolic Logic*, 39(1):31–42, 1974.
- [8] K. Fine and G. Schurz. Transfer theorems for multimodal logics. *Logic and Reality: Essays on the Legacy of Arthur Prior*, pages 169–214, 1996.
- [9] R. Goldblatt. *Logics of Time and Computation*, volume 7 of *CSLI Lecture Notes*. Stanford, 1992.
- [10] G.E. Hughes and M.J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Taylor & Francis, 1996.
- [11] S. Kost. Countable frames for bimodal logics $s_5 \otimes s_5$ and $grz.3 \otimes grz.3$. *Bulletin of the Section of Logic*, 42(3-4):183–199, 2013.

- [12] M. Kracht and F. Wolter. Properties of independently axiomatizable bimodal logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 56(4):1469–1485, 1991.
- [13] A. Kurucz, F. Wolter, D.M. Gabbay, and M. Zakharyashev. *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications: Theory and Applications*, volume 148 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier Science, 2003.
- [14] D.C. Makinson. There are infinitely many diodorean modal functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 31(3):406–408, 1966.
- [15] K. Segerberg. Modal logics with linear alternative relations. *Theoria*, 36(3):301–322, 1970.
- [16] K. Segerberg. *An essay in classical modal logic*, volume 13. Philosophical studies published by the Philosophical Society and the Department of Philosophy, University of Uppsala, 1971.
- [17] K. Świrydowicz. *Podstawy logiki modalnej*. Wydawnictwo Naukowe UAM, 2004.
- [18] F. Wolter. What is the upper part of the lattice of bimodal logics? *Studia Logica*, 53(2):235–242, 1994.

Indeks

\mathcal{C}

- korzeń, 56
- startowy punkt, 13
- n -struktura Kripkego, 3
- p -morfizm, 4

fuzja

- rodzin struktur, 11
- systemów, 10

język modalny, 1

klaster, 6

korzeń struktury, 5

model Kripkego, 3

podstruktura, 6

- generowana, 6
- GS, 6
- PGS, 6

spójna składowa, 5

struktura

- adekwatna dla systemu, 3
- charakteryzująca system, 3
- kanoniczna, 12
- spójna, 5
- ukorzeniona, 5

suma rozłączna

- modeli, 5
- struktur, 5

system modalny, 2

dwumodalny

$Grz.3 \otimes Grz.3$, 32, 60

$S4GrzB_2 \otimes Tr$, 42

$S4 \otimes S4$, 63

$S5 \otimes Grz.3B_2$, 44, 66

$S5 \otimes S5$, 21, 73

$\text{Log}\{\textcircled{2}\} \otimes \text{Log}\{\textcircled{2}\}$, 15

jednomodalny

$S4.3B_2M$, 8

$S4.3Grz (Grz.3)$, 7

$S4GrzB_2$, 9

$S4GrzB_3 \oplus \Diamond \Box \Diamond \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$, 9

$S5$, 8

kanoniczny-, 12

normalny-, 2

pretabularny-, 7

tabularny-, 7

własność modelu skończonego, 4